Central European Review of Economic Issues
EKONOMICKÁ REVUE

Klasifikácia úžitkových funkcií podľa zmien preferencií investora

Miloš KOPA, Charles University Prague[i]

Abstract

This paper deals with switched utility functions. The usual classification of utility functions is based on the signs of its derivatives representing a risk attitude of a decision maker. This approach leads to a stochastic dominance criteria for decision making. Especially, the positive second derivative of a utility function is a very common assumption and it corresponds to risk averse investors and second-order stochastic dominance relation. The switched utility functions present the alternative way to utility function characterisations. While stochastic dominance approach compare two given random variables (gambles) for all considered utility functions, switched utility functions analyze a given utility function for all considered gambles. This analysis is based on the number of switching preferences between two gambles due to changes in initial wealth. If we consider a portfolio selection problem as a maximizing expected utility problem, another approach to utility function characterizations can prefer the utility functions making this problem computationally less demanding. Especially, linear, piecewise linear and quadratic utility functions allow us to solve portfolio selection problem as a linear or quadratic programming problem. The aim of this paper is to compare these three ways of utility function classifications, mainly to analyze the switched properties of computationally attractive utility functions.

Keywords

Utility functions, risk aversion, preference switching, portfolio selection problem

JEL Classification: D81, G11

[i] Department of Probability and Mathematical Statistics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University Prague, Sokolovská 83, 186 75 Prague 8, Czech Republic
kopa@karlin.mff.cuni.cz
This research is partially supported by MŠMT ČR (The Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic – Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České Republiky) under the grant MSM 0021620839 and GAČR (Czech Science Foundation – Grantová Agentura České Republiky) under the project No. 201/07/P107. The support is greatly acknowledged.

1. Úvod

V teórii zostavovania optimálneho portfólia boli použité viaceré metódy a prístupy, od výberu investícií podľa očakávaného výnosu, viď napr. Domar a Musgrave (1944), cez modely implementujúce i riziko merané nejakou mierou rizika, uvedené napr. v Ogryczak a Ruszczynski (2002), kde najznámejšou mierou rizika je rozptyl výnosu v Markowitzovom modely, viď Markowitz (1952), až po zahrnutie a využitie úžitkových funkcií, pomocou ktorých zápis tejto úlohy (zostaviť portfólio s maximálnym výnosom a minimálnym rizikom) prejde do jednoduchej formulácie: maximalizovať očakávaný úžitok portfólia, viď napr. Ingersoll (1987).

Keďže úžitkové funkcie poskytujú možnosť zohľadnenia rôzneho stanoviska investora k riziku, sú dnes veľmi rozšírené. V praxi je ale spravidla veľmi náročné určiť (odhadnúť) presný tvar úžitkovej funkcie investora. A preto sa hľadali rôzne predpoklady, ktoré by okruh vhodných úžitkových funkcií čo najviac zúžili. Najčastejšie sa predpokladá, že investor je rizikovo averzný a teda úžitková funkcia je konkávna, viď Pratt (1964). Najznámejšiu klasifikáciu úžitkových funkcií ponúka stochastická dominancia, kde konkávne úžitkové funkcie sú uvažované pre stochastickú dominanciu druhého rádu, viď napr. Levy (1992) alebo, v kontextu optimalizácie portfólia, Kopa a Chovanec (2008). Táto klasifikácia, daná reláciami stochastickej dominancie, je založená na znamienkach derivácií úžitkovej funkcie. Predpokladá sa teda, že úžitková funkcia je všade diferencovateľná.

Alternatívou k tomuto prístupu je charakterizácia úžitkových funkcií podľa zmien preferencií medzi ľubovoľnými dvomi hrami pri meniacej sa (rastúcej) úrovni počiatočného bohatstva. Tu už predpoklad diferencovateľnosti nie je potrebný. Najčastejšie sa uvažujú úžitkové funkcie bez zmeny preferencií a s jednou zmenou preferencií, odvodené v Bell (1988) alebo Pedersen a Satchel (1997). Úžitková funkcia nemá zmenu preferencií, ak pre každé dve hry (investičné príležitosti) platí, že investor s touto úžitkovou funkciou preferuje jednu z nich pred druhou nezávisle na výške počiatočného bohatstva. Analogicky, investor má úžitkovú funkciu s jednou zmenou preferencií, ak pre každé dve hry platí, že so vzrastajúcim počiatočným bohatstvom investor zmení svoje preferencie medzi týmito dvomi hrami maximálne raz. Analogicky sa definujú úžitkové funkcie s n zmenami a to pre aditívny i multiplikatívny prístup ku hre.

Pre praktické výpočty optimalizácie portfólia je veľmi dôležité, aký tvar má úžitková funkcia. Preto môžeme klasifikovať úžitkové funkcie i podľa toho, aké numerické algoritmy sa musia použiť pri riešení problému maximalizácie očakávaného úžitku. Vzhľadom k tomu, že množina prípustných portfólií býva často polyedrická, je možné túto úlohu prepísať do tvaru úlohy lineárneho programovania, ak sa uvažujú lineárne alebo po častiach lineárne úžitkové funkcie. Výpočtovo vhodnými sú i kvadratické funkcie dávajúce úlohu kvadratického programovania, ktorá je tiež veľmi jednoducho a rýchlo riešiteľná. Bolo ukázané, že za predpokladu normálneho rozdelenia výnosov je možné i pre exponenciálnu úžitkovú funkciu dostať úlohu kvadratického programovania. Najznámejším príkladom optimalizačnej úlohy vo forme kvadratického programovania je Markowitzov model, viď Markowitz (1952). Obecne ale môže byť úloha optimalizácie portfólia výpočtovo náročná, obzvlášť pre nelineárne a nediferencovateľné úžitkové funkcie.

V tejto práci sa venujeme porovnaniu úžitkových funkcií zo všetkých troch uvedených perspektív. Bell (1988) ukázal spojitosť medzi úžitkovými funkciami bez zmeny, resp. s jednou zmenou a tzv. HARA (hyperbolicky absolútne rizikovo averznými) úžitkovými funkciami pre aditívny prístup ku hre. Analogickú analýzu pre multiplikatívny prístup ku hre predložili Pedersen a Satchel (1997). Tým boli dokázané počty zmien preferencií i pre niektoré výpočtovo atraktívne úžitkové funkcie – lineárne, kvadratické, exponenciálne. Táto práca dopĺňa túto analýzu o po častiach lineárne úžitkové funkcie. Hlavným cieľom tejto práce je ukázať, že i najjednoduchšia po častiach lineárna úžitková funkcia má nekonečne veľa zmien preferencií.

Ďalšie časti tejto práce sú členené následovne. V druhej kapitole zhrnieme známe výsledky teórie úžitkových funkcií v kontexte Arrow–Prattovej miery rizika. V tretej kapitole sa venujeme diferencovateľným úžitkovým funkciám bez zmeny a s jednou zmenou a to pre aditívny i multiplikatívny prístup ku hre. Hlavným prínosom tejto práce je štvrtá kapitola, kde sa analyzujú po častiach lineárne funkcie. Na záver zhrnieme a porovnáme hlavné výhody a nevýhody dvoch najčastejších tried úžitkových funkcií.

2. Úžitkové funkcie a riziková averzia

Definujme úžitkovou funkciu $u : I \to R$ ako spojitú neklesajúcu funkciu na intervalu I. Klasický prístup klasifikácie úžitkových funkcií je založený na ich Arrow–Prattovej absolútnej rizikovo averznej (ARA) miere, ktorá je lokálnou vlastnosťou úžitkovej funkcie a podľa Pratt (1964) je pre rastúcu, dvakrát diferencovateľnú funkciu na I, definovaná nasledovne:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{1}$$

pre všetky $x \in I$. Uvažujme investora s úžitkovou funkciou $u(x)$ a počiatočným majetkom x. Nech ε je hra (náhodná veličina) s pravdepodobnostným rozdelením P. Potom podľa Pratt (1964) hovoríme o rizikovo averznom investorovi na hladine majetku x, ak pre jeho úžitkovú funkciu $u(x)$ platí: $Eu(x+\varepsilon) < u(x+E\varepsilon)$, za predpokladu, že obe stredné hodnoty existujú. Ľahko možno dokázať, že pre dvakrát diferencovateľnú úžitkovú funkciu rizikovo averzného investora na hladine majetku x platí: $r(x) > 0$. Rizikovo averzný investor vždy preferuje obdržanie nenáhodnej čiastky $E\varepsilon$ pred prijatím hry ε, pretože táto hra je riskantná.

Hodnotu $\pi(x, P) > 0$, pre ktorú je splnená rovnosť: $u(x + E\varepsilon - \pi(x, P)) = Eu(x+\varepsilon)$, nazývame podľa Pratt (1964) rizikovou prémiou a vyjadruje peňažnú čiastku, ktorú je rizikovo averzný investor s úžitkovou funkciou $u(x)$ a počiatočným majetkom x ochotný zaplatiť, aby nemusel pristúpiť na hru ε, inak povedané, investor je indiferentný medzi prijatím hry ε a nenáhodnej čiastky $E\varepsilon - \pi(x,P)$. Ak hra v sebe skrýva veľké riziko (napr. živelnej pohromy), je možné rizikovú prémiu chápať i ako cenu za poistenie proti tomuto riziku. Ak je ε hra s malým rizikom, t.j. rozptyl ε je dostatočne malý, možno rizikovú prémiu približne vyjadriť nasledovne (podľa Pratt (1964)):

$$\pi(x,P) \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{var}(\varepsilon) r(x + E\varepsilon). \tag{2}$$

Ďalšou mierou rizika vychádzajúcou z derivácií úžitkovej funkcie je Arrow–Prattova relatívne rizikovo averzná (RRA) miera definovaná ako súčin investorovho počiatočného bohatstva a ARA miery. Pripomeňme, že vzhľadom k odvodeniu rizikovej prémie sú Arrow–Prattove absolútne i relatívne rizikovo averzné miery lokálnymi mierami rizikovej averzie investora.

Príkladom globálnej miery rizikovej averzie je Rubinsteinova rizikovo averzná miera, definovaná napr. v Kallberg a Ziemba (1983) pre hru ε s normálnym rozdelením $N(\mu,\sigma^2)$, nasledovne:

$$R(x) = -\frac{xEu''(x)}{Eu'(x)}. \tag{3}$$

Výhodou tejto miery rizika je vlastnosť, dokázaná v Kallberg a Ziemba, 1983), že za už zmieneného predpokladu normality výnosov portfólií pre všetkých investorov s rovnakou Rubinsteinovou rizikovo averznou mierou má úloha maximalizácie očakávaného úžitku (formulovaná v Kallberg a Ziemba (1983)) rovnaké optimálne riešenie. Táto vlastnosť neplatí pre ARA ani RRA miery. Avšak Kopa (2003a) a Kopa (2003b) vo svojej kvalitatívnej analýze stability optimálneho portfólia vzhľadom k zmenám v ARA miere, pre obecné rozdelenie výnosov portfólia, dokazuje skutočnosť, že optimálne portfólia investorov s podobnou ARA mierou sa nebudú veľmi líšiť.

3. Analýza diferencovateľných úžitkových funkcií podľa zmien preferencií

Pri definícií počtu zmien preferencií investora je treba rozlíšiť dva rôzne prístupy ku hre: aditívny prístup a multiplikatívny prístup. V predchádzajúcej časti sme automaticky uvažovali aditívny prístup ku hre, kedy sa výnos z investičnej príležitosti uvažuje ako absolútna veličina, t.j. konečný (náhodný) majetok investora s počiatočným majetkom x po hre ε je modelovaný ako: $x+\varepsilon$. Naproti tomu, je možné uvažovať konečný (náhodný) majetok investora v multiplikatívnom tvare t.j.: $x.\varepsilon$ kde ε vyjadruje relatívnu hodnotu koncového majetku na jednotku počiatočného majetku. V tomto prípade hovoríme o multiplikatívnom prístupe ku hre.

Uvažujme najskôr aditívny prístup ku hre. Nech ε a ϖ sú dve ľubovoľné hry, nech $u(x)$ je funkcia s definičným oborom *I*. Potom $u(x)$ je funkcia s $n>1$ zmenami, ak možno jej definičný obor rozdeliť na maximálne $n+1$ disjunktných otvorených intervalov intervalov I_i, $i = 1,2,\dots n+1$ tak, že sú splnené obidve nasledujúce podmienky:

(i) $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{clo}(I_i) = I$ kde $\mathrm{clo}(I_i)$ je uzáver intervalu I_i

(ii) $\left[Eu(x_{i+1}+\varepsilon) - Eu(x_{i+1}+\varpi)\right].$
$\left[Eu(x_i+\varepsilon) - Eu(x_i+\varpi)\right] \le 0$
pre všetky $x_i \in I_i$, $i=1,2,\dots,n$ také, že všetky stredné hodnoty existujú.

Označme túto funkciu: $u_n^a(x)$.

Dolný index označenia funkcie so zmenami udáva maximálny počet týchto zmien a horný index označenia určuje, aký prístup k hre sme zvolili: aditívny (a) alebo multiplikatívny (m). Podmienka (ii) znamená, že investor s úžitkovou funkciou s *n* zmenami pre najmenšiu možnú hladinu majetku preferuje jednu hru pred druhou, alebo je voči nim indiferentný, a so zvyšujúcim sa majetkom sa jeho preferencie medzi týmito dvomi hrami najviac *n*-krát zmenia. Pričom maximálny počet týchto zmien: *n*, nezávisí od zvolenej dvojice hier. Ešte je potrebné zdôrazniť, že každá funkcia s *n* zmenami patrí zároveň i medzi funkcie s $n+k$ zmenami ($k \ge 0$). Funkcie so zmenami obecne nemusia byť neklesajúce (úžitkové). Ak existujú pre ľubovoľne veľké *n* hry, medzi ktorými investor zmení preferencie aspoň *n*-krát, hovoríme stručne, že úžitková funkcia má nekonečne veľa zmien preferencií.

Pre multiplikatívny prístup ku hre je definícia úžitkovej funkcie s *n* zmenami, označ $u_n^m(x)$, rovnaká ako pre aditívny prístup s výnimkou bodu (ii), ktorý je preformulovaný nasledovne:

(ii') $\left[Eu(x_{i+1}.\varepsilon) - Eu(x_{i+1}.\varpi)\right].$
$\left[Eu(x_i.\varepsilon) - Eu(x_i.\varpi)\right] \le 0$
pre všetky $x_i \in I_i$, $i=1,2,\dots,n$ také, že všetky stredné hodnoty existujú.

Špeciálny prípad funkcií so zmenami tvoria funkcie s 0 zmenami (resp. funkcie bez zmeny). Nech $u(x)$ je funkcia definovaná na intervale *I*. Nech pre každé dve hry ε a ϖ také, že nasledujúce stredné hodnoty existujú, platí jedna z nasledujúcich vlastností:

a) $\left[Eu(x+\varepsilon)-Eu(x+\varpi)\right] \leq 0$

pre všetky $x \in I$.

b) $\left[Eu(x+\varepsilon)-Eu(x+\varpi)\right] \geq 0$

pre všetky $x \in I$.

Potom sa funkcia $u(x)$ nazýva bezzmenou funkciou, resp. funkciou bez zmeny, pre aditívny prístup ku hre; označuje sa $u_0^a(x)$. Pre funkciu bez zmeny v multiplikatívnom prístupe ku hre $u_0^m(x)$ platí pre ľubovoľné dve hry ε a ϖ také, že nasledujúce stredné hodnoty existujú, jedna z dvoch nasledujúcich vlastností:

a) $\left[Eu(x.\varepsilon)-Eu(x.\varpi)\right] \leq 0$

pre všetky $x \in I$.

b) $\left[Eu(x.\varepsilon)-Eu(x.\varpi)\right] \geq 0$

pre všetky $x \in I$.

Tieto podmienky ukazujú, že investor má úžitkovú funkciu bez zmeny (pre aditívny alebo multiplikatívny prípad) vtedy, ak z každých dvoch hier preferuje vždy tú istú, bez závislosti na výške počiatočného bohatstva.

V ďalšej analýze budeme predpokladať, že v multiplikatívnom prístupe ku hre nemôže byť konečné bohatstvo nulové alebo záporné, t.j. nie sú povolené krátke pozície a teda $\varepsilon > 0$. Potom vzhľadom k tomu, že logaritmus je monotónna funkcia, pre ktorú platí:

$$\log(x.\varepsilon) = \log(x) + \log(\varepsilon)\,, \tag{4}$$

môžeme ľahko overiť, že ak je podmienka (ii') splnená pre počiatočné bohatstvo x a hru ε, tak je splnená podmienka (ii) pre počiatočné bohatstvo vo výške $\log(x)$ a hru $\log(\varepsilon)$. A preto z tvaru funkcií s n zmenami pre aditívny prístup ku hre dokážeme odvodiť i funkcie s n zmenami pre multiplikatívny prístup ku hre pomocou pravidla:

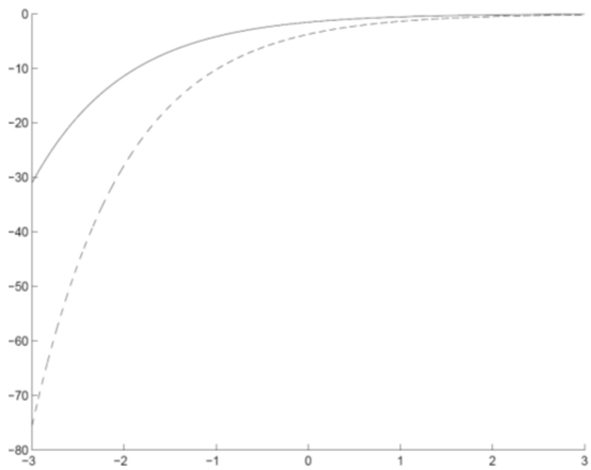
$$u_n^m(x) = u_n^a(\log(x)) \tag{5}$$

pre všetky $n = 0,1,2...$ Viac informácii a detailnejšie odvodenie tohoto pravidla je možné nájsť v Pedersen a Satchel (1997). Ďalej sa teda budeme venovať úžitkovým funkciám so zmenami preferencií len pre aditívny prístup ku hre.

Uvažujme nasledujúci príklad: Skúmajme funkciu $u(x) = -e^{-x}$ a vypočítajme počet jej zmien. Táto funkcia je definovaná na celej reálnej osi. Uvažujme ľubovoľné dve hry ε a ϖ a bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $Eu(\varepsilon) \leq Eu(\varpi)$. Potom platí:

$$Ee^{-\varepsilon} \geq Ee^{-\varpi} \quad \Rightarrow \quad e^{-x}Ee^{-\varepsilon} \geq e^{-x}Ee^{-\varpi}$$
$$\Rightarrow \quad Eu(x+\varepsilon) \geq Eu(x+\varpi)$$

a teda skúmaná funkcia je bez zmeny. Pre špeciálne zvolené hry: $\varepsilon = \pm 1$ s rovnakou pravdepodobnosťou; $\varpi = \pm 2$ s rovnakou pravdepodobnosťou, môžme vidieť na obr. 1 priebeh uvažovaných stredných hodnôt na intervale $(-3,3)$ v závislosti na výške počiatočného majetku, kde plnou čiarou je vyznačený očakávaný úžitok konečného majetku po hre ε a čiarkovane po hre ϖ.



Obrázok 1 Očakávané úžitky pre exponenciálnu úžitkovú funkciu

V praxi sa za definičný obor funkcií so zmenami najčastejšie považuje *R*. Odvoďme tvar funkcií bez zmeny priamo z definície. Uvažujme hry ε, ϖ a funkciu bez zmeny, ktorá je nekonečne diferencovateľná a definovaná na *R*. Potom z Tyalorovho rozvoja pre túto funkciu dostaneme:

$$Eu(x+\varepsilon)-Eu(x+\varpi) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k u^{(k)}(x) \tag{6}$$

kde $m_k = \dfrac{E(\varepsilon^k)-E(\varpi^k)}{k!}$ a $u^{(k)}(x)$ je k-tá derivácia funkcie u. Zvoľme hry ε, ϖ tak, aby $m_k = 0$ pre každé $k > 2$. Potom platí pre každé x:

$$Eu(x+\varepsilon)-Eu(x+\varpi) = m_1 u'(x) + m_2 u''(x).$$

Aby bola u bez zmeny, nesmú existovať x_1, x_2, ktoré by splňovali obe nasledujúce podmienky:

$$a = m_1 u'(x_1) + m_2 u''(x_1)$$
$$b = m_1 u'(x_2) + m_2 u''(x_2).$$

To je ale možné len vtedy, ak platí:

$$\begin{vmatrix} u'(x_1) & u''(x_1) \\ u'(x_2) & u''(x_2) \end{vmatrix} = 0,$$

čo je splnené vtedy a len vtedy, keď existuje konštanta c taká, že pre každé x platí:

$$u''(x) + cu'(x) = 0.$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice s dodatočnou podmienkou na neklesajúcosť úžitkovej funkcie dostaneme dvoch kandidátov na úžitkové funkcie bez zmeny:

$$u_0^a(x) = ae^{cx} + b \qquad ac \geq 0,\ b \in R$$

$$u_0^a(x) = ax + b \qquad a \geq 0,\ b \in R.$$

U exponenciálnej funkcie sa bezzmenosť dokáže rovnako ako vo vyššie uvedenom príklade a u lineárnej funkcie je bezzmenosť priamym dôsledkom linearity strednej hodnoty. Tým sme ukončili odvodenie nekonečne diferencovateľných úžitkových funkcií pre aditívny prístup ku hre. Zaujímavé je, že tieto funkcie majú zaujímavú vlastnosť i z pohľadu rizikových mier: trieda úžitkových funkcií s konštantnou absolútnou rizikovou averziou je zhodná s triedou nekonečne diferencovateľných úžitkových funkcií pre aditívny prístup ku hre.

Podobnou úvahou môžeme odvodiť i tvar nekonečne diferencovateľných úžitkových funkcií s jednou zmenou pre aditívny prístup ku hre. Výsledná diferenciálna rovnica má tvar:

$$u'''(x) + ku''(x) + lu'(x) = 0. \tag{7}$$

V závislosti od konštánt k a l riešením tejto rovnice dostávame nasledujúce tvary funkcií a iba medzi nimi môžu byť nekonečne diferencovateľné funkcie s jednou zmenou:

1) pre $k = 0,\ l = 0$: $u_1^a(x) = ax^2 + bx + c$,

2) pre $k = 0,\ l \neq 0$: $u_1^a(x) = (ax + b)e^{cx} + d$,

3) pre $k \neq 0,\ l = 0$: $u_1^a(x) = ax + be^{cx} + d$,

4) pre $k \neq 0,\ l \neq 0$: $u_1^a(x) = ae^{bx} + ce^{dx} + f$,

kde *a, b, c, d, f* sú ľubovoľné reálne konštanty. Pričom sme vylúčili tie kombinácie konštánt k a l, pre ktoré má charakteristický polynóm diferenciálnej rovnice:

$$\lambda^3 + k\lambda^2 + l\lambda = 0 \tag{8}$$

dva komplexné korene, pretože to by sme dostali v prípadoch 2) a 3) komplexné funkcie a v 4) by sme obdržali reálnu funkciu len voľbou $a = c$ a to v tvare: $2ae^{bx}\cos(cx) + d$. Táto funkcia ale nekonečnekrát mení znamienko, a preto nemôže byť funkciou s jednou zmenou. Detailne odvodenie je možné nájsť v Bell (1988).

Príkladom použitia funkcie s jednou zmenou je investor, ktorý na nízkej úrovni majetku dá prednosť hre so zápornou strednou hodnotou, v ktorej môže vyhrať veľké bohatstvo, napríklad lotérii, pred spravodlivou hrou, t.j. hrou s nulovou strednou hodnotou. Ale s rastúcou úrovňou jeho majetku dosiahne hranicu x_h, na ktorej je indiferentný voči uvažovaným hrám a obidve mu prinášajú rovnaký očakávaný úžitok. A pre úroveň majetku $x > x_h$ už preferuje spravodlivú hru pred lotériou.

K využitiu funkcií s jednou zmenou skúmajme, na akom definičnom obore sú neklesajúce v závislosti na parametroch. Pre lepšiu prehľadnosť umiestnime výsledok do Tabuľky 1 v prílohe. Vzhľadom k tomu, že pri zmene preferencií môžme uvažovať i hry s pravdepodobnostným rozdelením s neobmedzeným nosičom, napr. s normálnym rozdelením, obmedzíme sa iba na úžitkové funkcie so zmenou, ktoré sú definované a neklesajúce na R. V tomto prípade máme k dispozícii nasledujúce úžitkové funkcie:

$$u_1^a(x) = ae^{cx} + b \qquad ac \geq 0,\ b \in R$$

$$u_1^a(x) = ax + b \qquad a \geq 0,\ b \in R$$

$$u_1^a(x) = ax + be^{cx} + d \qquad a \geq 0,\ bc \geq 0,\ d \in R$$

$$u_1^a(x) = ae^{bx} + ce^{dx} + f \qquad ab \geq 0,\ cd \geq 0,\ f \in R.$$

Vidíme, že k dvom funkciám bez zmeny, ktoré automaticky patria i medzi funkcie s jednou zmenou, pribudli ešte ich súčty. Ukázali sme teda zaujímavú vlastnosť pre triedu úžitkových funkcií s jednou zmenou, ktoré sú definované a nekonečne diferencovateľné na R.

Veta 1

Predpokladajme aditívny prístup ku hre. Každá úžitková funkcia s jednou zmenou, ktorá je definovaná a nekonečne diferencovateľná na R sa dá napísať ako súčet dvoch úžitkových funkcií bez zmeny.

V analýze úžitkových funkcií podľa absolútne rizikovo averznej miery majú význačné postavenie úžitkové funkcie s kladnou a klesajúcou absolútnou rizikovo averznou mierou. Investor s takouto úžitkovou funkciou je so zvyšujúcim sa majetkom stále menej a menej rizikovo averzný a pre teoreticky dostatočne veľkú úroveň majetku sa správa ako rizikovo neutrálny. Ak prijmeme tieto predpoklady, potom jedinou vhodnou úžitkovou funkciou s jednou zmenou, definovanou a nekonečne diferencovateľnou na R, je súčet lineárnej a exponenciálnej funkcie:

$$u_1^a(x) = ax + be^{cx} + d$$

$$\text{pre } a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d \in R,$$

pretože lineárna a exponenciálna funkcia majú konštantnú absolútne rizikovo averznú mieru a pre súčet dvoch exponenciálnych funkcií platí, že riziková miera pre nekonečne veľkú úroveň majetku je nenulová. Na druhú stranu, súčet lineárnej a exponenciálnej funkcie má ARA mieru v tvare:

$$r(x) = -\frac{bc^2e^{cx}}{a+bce^{cx}}, \tag{9}$$

čo je klesajúca funkcia, konvergujúca k nule.

Nakoniec pojednania o nekonečne diferencovateľných funkciách bez zmeny uveďme ich spojitosť s HARA (hyperbolicky absolútne rizikovo averznými) úžitkovými funkciami, pre ktoré platí

$$r(x) = \frac{1}{ax+b}. \tag{10}$$

Podľa Pedersen, Satchel (1997) možno ukázať, že voľbou $a = 0$ získame úžitkové funkcie bez zmeny pre aditívny prístup ku hre, a pre $b = 0$ dostávame úžitkové funkcie bez zmeny pre multiplikatívny prístup ku hre.

Pre úplnosť je nutné skonštatovať, že úžitkovými funkciami s viac ako jednou zmenou sa v tejto práci nezaoberáme, pretože nie je jasná ich ekonomická interpretácia.

4. Analýza výpočtovo atraktívnych úžitkových funkcií podľa zmien preferencií

V predchádzajúcej analýze funkcií bez zmeny sme predpokladali nekonečnú diferencovateľnosť skúmaných funkcií. Odvodili sme počet zmien pre lineárnu, kvadratickú i exponenciálnu funkciu. Posledným typom ešte neanalyzovaných výpočtovo atraktívnych úžitkových funkcií sú po častiach lineárne funkcie. Keďže tieto funkcie nie sú diferencovateľné v každom bode, nemá veľký zmysel aplikovať teóriu ARA mier. Nediferencovateľnosť ale ešte nemusí viesť k veľkému počtu zmien preferencií a tak sa môže stať, že i úžitková funkcia, ktorá nie je všade diferencovateľná, môže byť príkladom funkcie bez zmeny alebo funkcie s jednou zmenou. Dôkazom toho je funkcia:

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda x \text{ pre } x > x_h \\ &= \lambda x - (x_h - x)^{\alpha} \text{ pre } x \le x_h \end{aligned}$$

kde $\lambda \ge 0,\ 1 \le \alpha \le 2$. Táto funkcia je v aditívnom prístupe ku hre funkciou bez zmeny, ako ukazuje nasledujúca analýza.

Uvažujme dve hry: ε, ϖ a označme $\tau = x_h - x$. Potom pre každé x platí:

$$\begin{aligned}
& Eu(x+\varepsilon) > Eu(x+\omega) \\
& \Leftrightarrow \\
& P(x+\varepsilon > x_h)E[\lambda(x+\varepsilon) | x+\varepsilon > x_h] \\
& +P(x+\varepsilon \le x_h)E\left[\lambda(x+\varepsilon) | x+\varepsilon \le x_h\right] \\
& -P(x+\varepsilon \le x_h)E\left[(\tau-\varepsilon)^{\alpha} | x+\varepsilon \le x_h\right] \\
& > P(x+\omega > x_h)E[\lambda(x+\omega) | x+\omega > x_h] \\
& +P(x+\omega \le x_h)E\left[\lambda(x+\omega) | x+\omega \le x_h\right] \\
& -P(x+\omega \le x_h)E\left[(\tau-\omega)^{\alpha} | x+\omega \le x_h\right] \\
& \Leftrightarrow \\
& \lambda E\varepsilon - P(\varepsilon \le \tau)E\left[(\tau-\varepsilon)^{\alpha} | \varepsilon \le \tau\right] > \\
& \lambda E\omega - P(\omega \le \tau)E\left[(\tau-\omega)^{\alpha} | \omega \le \tau\right]
\end{aligned}$$

a posledná nerovnosť je alebo nie je splnená nezávisle na x, a preto je uvažovaná funkcia úžitkovou funkciou bez zmeny.

Túto úžitkovú funkciu použijeme napríklad pre investora, ktorý má počiatočný majetok menší ako hranica x_h, a pokiaľ sa zvýši jeho majetok po hre nad túto hranicu, investor splnil investičný cieľ a je rizikovo neutrálny. V opačnom prípade nesplnil cieľ a musí platiť penále a teda je rizikovo averzný. Keď porovnáme túto funkciu s funkciou

$$u_1^a(x) = ax + be^{cx} + d$$

$$\text{pre } a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d \in R,$$

tak môžeme konštatovať, že obe tieto funkcie majú akúsi „zmenu". Jedna má zmenu funkčného tvaru, ale nemá zmenu preferencií, zatiaľ čo druhá má stále rovnaký predpis, ale jednu zmenu preferencií investora.

Výpočtovo výhodné sú hlavne po častiach lineárne úžitkové funkcie, pretože s ich využitím je možné úlohu maximalizácie očakávaného úžitku formulovať ako úlohu lineárneho programovania, viď napr. Pflug a Swietanowski (1998). Pri analýze po častiach lineárnych funkcií sa obmedzíme na ten najjednoduchší prípad, ale je zrejmé, že podobným spôsobom by sa postupovalo i pre zložitejšie po častiach lineárne funkcie.

Veta 2

Predpokladajme aditívny prístup ku hre. Úžitková funkcia:

$$\begin{aligned} u(x) &= ax \quad \text{pre } x \ge 0 \\ &= bx \quad \text{pre } x \le 0 \end{aligned}$$

kde $a > b > 0$ *je funkciou s nekonečne veľa zmenami.*

Dôkaz tohto tvrdenia je možné nájsť v prílohe. Na obrázku 2 v prílohe je uvedený príklad stredných hodnôt $Eu(x+\varepsilon)$ (čiarkovane) a $Eu(x+\varpi)$ (plná čiara), kde ε, ϖ sú uvažované hry z dôkazu Vety 2, medzi ktorými investor s uvažovanou, po častiach lineárnou úžitkovou funkciou, mení preferencie aspoň $2n$-krát pre špeciálnu voľbu: $n = 3, a = 10, b = 0.5, \alpha = 3$. Pre lepšiu prehľadnosť je v pravej časti obrázku umiestnený graf rozdielu stredných hodnôt:

$$Eu(x+\varepsilon) - Eu(x+\varpi),$$

na ktorom je lepšie vidieť zmenu preferencií.

Nakoniec porovnajme po častiach lineárnu funkciu s výslednou úžitkovou funkciou s jednou zmenou a zhrňme ich výhody do Tabuľky 2 v prílohe.

5. Záver

Pri klasifikácii úžitkových funkcií je možné postupovať podľa rôznych kritérií. V každom prípade, cieľom každej klasifikácie je rozdeliť triedu úžitkových funkcií na podtriedy tak, aby všetky úžitkové funkcie v jednej podtriede mali spoločné vlastnosti. Najčastejšie delenie využíva informáciu o rizikovej averzii investora, napríklad prístup stochastickej dominancie druhého rádu.

V tomto článku sme sa zamerali na iný spôsob charakterizovania úžitkových funkcií. Hlavným kritériom bol maximálny počet zmien preferencií investora medzi dvomi ľubovoľne zvolenými hrami pri zvyšujúcom sa počiatočnom bohatstve. Napríklad, investor má úžitkovú funkciu s jednou zmenou preferencií, ak pre malé úrovne počiatočného bohatstva preferuje z dvojice hier jednu z nich a pre veľké úrovne preferuje tú druhú. Najzákladnejším typom úžitkových funkcií so zmenami sú tzv. bezzmené funkcie, t.j. funkcie bez zmeny preferencií, kedy investor preferuje jednu z dvojice hier nezávisle na úrovni počiatočného bohatstva. Vzhľadom k tomu, že môžme uvažovať aditívny alebo multiplikatívny prístup ku hre, je nutné rozlišovať dve skupiny podtried úžitkových funkcií. Našťastie je možné z tvaru úžitkových funkcií s n zmenami pre aditívny prístup pomocou logaritmickej transformácie odvodiť i tvar úžitkových funkcií s n zmenami pre multiplikatívny prístup. Preto sme sa v tejto práci zamerali na aditívny prístup ku hre.

Bolo ukázané, viď Bell (1988), alebo Pedersen a Satchel (1997), že za predpokladu nekonečnej diferencovateľnosti trieda úžitkových funkcií bez zmeny pre aditívny prístup ku hre je totožná s triedou úžitkových funkcií s konštantnou rizikovou averziou v zmysle Arrow–Prattovej absolútne rizikovo averznej miery. Podobne splývajú úžitkové funkcie bez zmeny v multiplikatívnom prístupe ku hre s úžitkovými funkciami s konštantnou relatívnou rizikovo averznou mierou. Tým bolo ukázané, že spojenie týchto dvoch klasifikácií, t.j. podľa zmien preferencií a podľa rizikovej averzie, má zmysel a bola odvodená trieda úžitkových funkcií, ktoré majú jednu zmenu preferencií a súčasne splňujú klasické predpoklady na rizikovo averznú mieru. Úžitkové funkcie s viac zmenami preferencií sme neanalyzovali, pretože nie je jasná ich ekonomická interpretácia.

Pri vypustení predpokladu nekonečnej diferencovateľnosti sa stráca možnosť využiť ARA alebo RRA mieru, ale môže zostať zachovaná pekná vlastnosť s pohľadu zmien preferencie investora. Uviedli sme príklad úžitkovej funkcie, ktorá nie je diferencovateľná v jednom bode a predsa je funkciou bez zmeny preferencií pre aditívny prístup ku hre.

Úžitkové funkcie je možné klasifikovať i z hľadiska výpočtového. Obzvlášť obľúbené sú lineárne, kvadratické a po častiach lineárne úžitkové funkcie, pretože ich použitím je možné formulovať úlohu maximalizácie očakávaného úžitku ako úlohu lineárneho alebo kvadratického programovania. Otázkou ale bolo, aké vlastnosti majú tieto úžitkové funkcie z pohľadu zmien preferencií investora. Zatiaľ čo o lineárnej, resp. kvadratickej úžitkovej funkcii už Bell (1988) ukázal, že v prípade aditívneho prístupu ku hre majú tieto funkcie nula resp. jednu zmenu preferencií, analýzu po častiach lineárnej úžitkovej funkcie predkladá až tento článok. Ukázali sme, že i v tom najjednoduchšom prípade, t.j. keď má úžitková funkcia iba dve lineárne časti, má po častiach lineárna úžitková funkcia v prípade aditívneho prístupu ku hre nekonečne veľa zmien preferencií a teda nie je vhodná z tohoto hľadiska. Tuto skutočnosť spôsobuje práve ten jeden bod zlomu. Je jasné, že zložitejšie po častiach lineárne úžitkové funkcie, ktoré sú zaujímavé i z pohľadu stochastickej dominancie druhého rádu viď Russel a Seo (1989) a Post (2003), majú nekonečne veľa zmien preferencií.

Použitie funkcií bez zmeny, alebo s jednou zmenou má veľkú výhodu i v úlohách viacstupňového stochastického programovania, a to hlavne v tom prípade, keď potrebujeme urobiť investičné rozhodnutie medzi dvomi príležitosťami v čase, kedy ešte presne nepoznáme, aký majetok máme k dispozícii (napr. ešte nepoznáme výsledok predchádzajúcej investície).

Literatura

BELL, D. (1988). One switch utility function and a measure of risk, *Management Science* 34 (12): 1416–1424. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.34.12.1416

DOMAR, E., MUSGRAVE, R.A. (1944). Proportional income taxation and risk taking, *Quarterly Journal of Economics* 57.

INGERSOLL, J.E. (1987). *Theory of financial decision making*, Rowman & Littlefield.

KALLBERG, J.G., ZIEMBA, W.T. (1983). Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems, *Management Science* 29: 1257–1276. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.29.11.1257

KOPA, M. (2003a). Portfolio selection problem and stability of optimal portfolio. *Week of Doctoral Students 2003 Proceedings,* Part I: 13 – 18.

KOPA, M. (2003b). Stability of optimal solution in portfolio selection problem. In: *Mathematical Methods in Economics*, pp. 166 – 170.

KOPA, M., CHOVANEC, P. (2008). A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure, *Kybernetika,* 44 (2): 243 – 258.

LEVY, H. (1992). Stochastic dominance and expected utility: Survey and analysis, *Management Science* 38 (4): 555–593. http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.38.4.555

MARKOWITZ, H.M. (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance* 7(1): 77–91. http://dx.doi.org/10.2307/2975974

ORGYCZAK W., RUSZCZYŃSKI A. (2002). Dual stochastic dominance and related mean-risk models, *SIAM Journal on Optimization* 13: 60–78. http://dx.doi.org/10.1137/S1052623400375075

PEDERSEN, C., SATCHEL S. (1997). Risk, utility and switching between gambles, W*orking paper*. Cambridge: Trinity College.

PFLUG, C.CH., SWIETANOWSKI, A. (1998). Dynamic asset allocation under uncertainty for pension fund management. *Aurora report,* Wien.

POST, T. (2003). Empirical tests for stochastic dominance efficiency, *Journal of Finance* 58: 1905–1932. http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00592

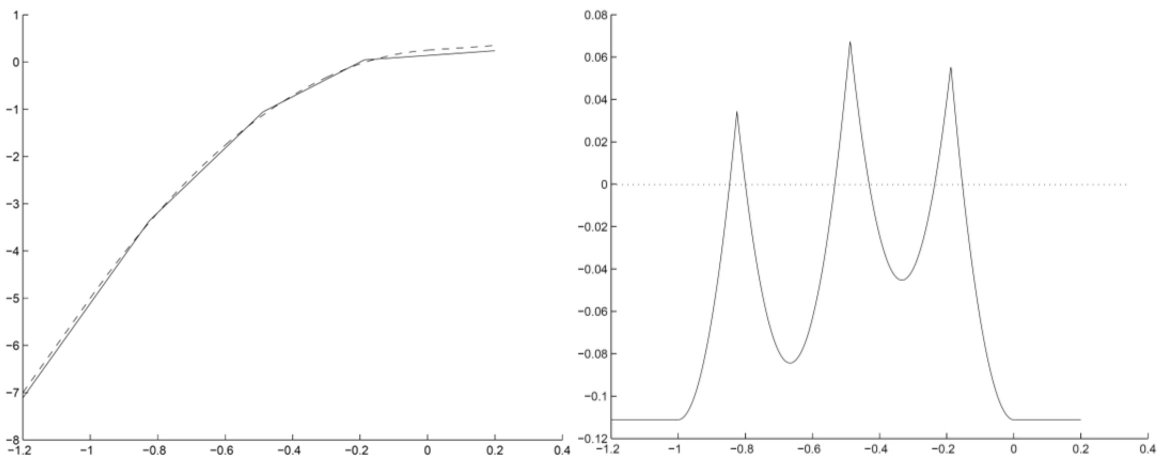
PRATT, J.W. (1964): Risk aversion in the small and in the large, *Econometrica* 32: 122–136. http://dx.doi.org/10.2307/1913738

RUSSELL, W.R., SEO, T. K. (1989). Representative sets for stochastic dominance rules. In: Fomby, T.B. a Seo, T.K.: *Studies in the Economics of Uncertainty: In honor of Josef Hadar*. New York: Springer, pp. 59–76.

Prílohy

Tabuľka 1 Úžitkové funkcie s jednou zmenou

Funkcia	Parametre	Definičný obor
$u(x)=ax^2+bx+c$ $u'(x)=2ax+b$	$a>0,\ b,c\in R$	$x\ge -\frac{b}{2a}$
	$a=0,\ b\ge 0$	$x\in R$
	$a<0,\ b,c\in R$	$x\le -\frac{b}{2a}$
$u(x)=(ax+b)e^{cx}+d$ $u'(x)=(acx+bc+a)e^{cx}$	$ac>0,\ b,d\in R$	$x\ge -\frac{bc+a}{ac}$
	$ac=0,\ bc+a\ge 0$	$x\in R$
	$ac<0,\ b,d\in R$	$x\le -\frac{bc+a}{ac}$
$u(x)=ax+be^{cx}+d$ $u'(x)=a+bce^{cx}$	$a\ge 0,\ bc\ge 0,\ d\in R$	$x\in R$
	$a>0,\ bc<0,\ d\in R$	$cx\le \log\left(-\frac{a}{bc}\right)$
	$a<0,\ bc>0,\ d\in R$	$cx\ge \log\left(-\frac{a}{bc}\right)$
$u(x)=ae^{bx}+ce^{dx}+f$ $u'(x)=abe^{bx}+cde^{dx}$	$ab\ge 0,\ cd\ge 0,\ f\in R$	$x\in R$
	$ab<0,\ cd>0,\ f\in R,\ b\ne d$	$e^{(d-b)x}\ge -\frac{ab}{cd}$
	$ab>0,\ cd<0,\ f\in R,\ b\ne d$	$e^{(d-b)x}\le -\frac{ab}{cd}$
	$b=d,\ (a+c)b>0$	$x\in R$



Obrázok 2 Porovnanie dvoch funkcií

Tabuľka 2 Porovnanie dvoch funkcií

$u_1^a(x) = ax - be^{-cx}$, $a,b,c > 0$	$u(x) = ax$ pre $x \geq 0$ $= bx,$ pre $x < 0$ $a > b > 0$
– absolútne rizikovo averzná	– úlohu maximalizácie očakávaného úžitku možno formulovať ako úlohu lineárneho programovania
– klesajúca absolútne rizikovo averzná miera	
– úžitková funkcia s jednou zmenou pre aditívny prístup ku hre	

Dôkaz Vety 2

Pre ľubovoľné prirodzené n uvažujme hru ε s rovnomerným rozdelením $R(0,1)$ a hru ω s diskrétnym rozdelením: $P(\omega = x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,...n$, kde:

$$x_i = \frac{i - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^\alpha}}{n} \qquad \alpha > \frac{\log \frac{8a}{a-b}}{\log(n)} + 1$$

Vypočítajme očakávaný úžitok pre hru ω na intervale $\langle -x_{k+1}, -x_k \rangle$ pre $k = 1,2,...n-1$:

$$\begin{aligned} Eu(x+\omega) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{a}{n}(x+x_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{b}{n}(x+x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{a}{n}\left(x + \frac{i - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^\alpha}}{n}\right) + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{b}{n}\left(x + \frac{i - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^\alpha}}{n}\right) \\ &= \frac{(a-b)k}{n}x + bx + \frac{(a-b)k^2}{2n^2} + \frac{b}{2} - \frac{b}{n^{\alpha+1}} - \frac{(a-b)k}{n^{\alpha+2}} \end{aligned}$$

na krajných intervaloch platí:

$$\begin{aligned} Eu(x+\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n}(x+x_i) \qquad\qquad x < -x_n \\ &= ax + a\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \\ &= ax + a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Eu(x+\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}(x+x_i) \qquad\qquad x > -x_1 \\ &= bx + b\left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \\ &= bx + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \end{aligned}$$

Ďalej podobne postupujme pre hru ε :

$$Eu(x+\varepsilon)=\int_0^1 u(x+\varepsilon)\,d\varepsilon = ax+\frac{a}{2} \qquad \text{pre} \quad x\le -1$$

$$= bx+\frac{b}{2} \qquad \text{pre} \quad x\ge 0$$

$$= \int_0^{-x} a(x+\varepsilon)\,d\varepsilon + \int_{-x}^1 b(x+\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$= \frac{b-a}{2}x^2+bx+\frac{b}{2} \qquad \text{pre} \quad x\in(-1,0)$$

Z toho vyplýva, že pre $x<-1$ a $x>0$ platí:

$$Eu(x+\varepsilon) > Eu(x+\omega).$$

V nasledujúcom priebehu dokážeme, že v krajných bodoch intervalu $\langle -x_{k+1}, -x_k\rangle$ pre $k=1,2,...n-1$ platí: $Eu(x+\varepsilon) < Eu(x+\omega)$, ale vo vnútornom bode $x=-\frac{k}{n}$ je splnená opačná nerovnosť: $Eu(x+\varepsilon) > Eu(x+\omega)$.

$$Eu(-x_k+\omega)-Eu(-x_k+\varepsilon)$$

$$=\frac{(a-b)k}{n}\left(-\frac{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{n^\alpha}}{n}\right)+\frac{(a-b)k^2}{2n^2}-\frac{b}{n^{\alpha+1}}-\frac{(a-b)k}{n^{\alpha+2}}+\frac{a-b}{2}\left(-\frac{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{n^\alpha}}{n}\right)^2$$

$$=-\frac{b}{n^{\alpha+1}}+\frac{a-b}{8n^2}+\frac{a-b}{2n^{2\alpha+1}}-\frac{(a-b)k}{n^{\alpha+2}}+\frac{a-b}{2n^{\alpha+1}}$$

$$=\frac{1}{n^{\alpha+1}}\left(-b+\frac{a-b}{8}n^{\alpha-1}+\frac{a-b}{2n^\alpha}-\frac{(a-b)k}{n}+\frac{a-b}{2}\right)$$

$$>\frac{1}{n^{\alpha+1}}\left(-a+\frac{a-b}{8}n^{\alpha-1}\right)>0$$

vzhľadom k predpokladu na α .

$$Eu(-\frac{k}{n}+\omega)-Eu(-\frac{k}{n}+\varepsilon)$$

$$=-\frac{(a-b)k^2}{n^2}+\frac{(a-b)k^2}{2n^2}-\frac{b}{n^{\alpha+1}}-\frac{(a-b)k}{n^{\alpha+2}}+\frac{(a-b)k^2}{2n^2}<0$$

a tým sme dokázali, že funkcia má na každom intervale $\langle -x_{k+1}, -x_k\rangle$ aspoň dve zmeny a na krajných intervaloch: $(-\infty,-x_n)$, $(-x_1,\infty)$ po aspoň jednej zmene, a teda sme pre ľubovoľné n našli dvojicu hier, medzi ktorými investor s uvažovanou úžitkovou funkciou $u(x)$ zmení preferencie aspoň $2n$-krát a teda $u(x)$ je funkcia s nekonečne mnoho zmenami. Q.E.D