

Ivan BALÁZS¹, Jindřich MELCHER²

STABILITA TENKOSTĚNNÝCH NOSNÍKŮ S PŘÍČNÝM SPOJITÝM PODEPŘENÍM

STABILITY OF THIN-WALLED BEAMS WITH LATERAL CONTINUOUS RESTRAINT

Abstrakt

Kovové tenkostěnné nosníky jsou běžně používány jako součásti nosných konstrukcí. Jejich odolnost je zpravidla limitována vyčerpáním vzpěrné únosnosti v důsledku stabilitních problémů. Může být zvýšena v případě, kdy je tenkostěnný průřez příčně podepřen např. pomocí prvků opláštění nebo stropní konstrukce. Příspěvek se zabývá možnostmi výpočtu kritického zatížení potřebného pro stanovení vzpěrné únosnosti ohýbaných tenkostěnných nosníků s příčným spojitým podepřením.

Klíčová slova

Klopení, kritické zatížení, metoda sítí, numerická analýza, stabilita, tenkostěnný nosník.

Abstract

Metal beams of thin-walled cross-sections have been widely used in building industry as members of load-bearing structures. Their resistance is usually limited by lateral torsional buckling. It can be increased in case a beam is laterally supported by members of cladding or ceiling construction. The paper deals with possibilities of determination of critical load of thin-walled beams with lateral continuous restraint which is crucial for beam buckling resistance assessment.

Keywords

Critical load, finite difference method, lateral torsional buckling, numerical analysis, stability, thin-walled beam.

1 ÚVOD

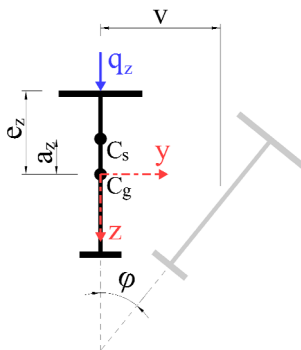
Odolnost štíhlých kovových ohýbaných nosníků tenkostěnného průřezu, které nejsou po délce příčně podepřeny, je zpravidla limitována ztrátou příčné a torzní stability. V případě, že jsou tyto nosníky použity např. jako vaznice nebo paždíky, mohou k nim být připojeny plošné prvky střešního nebo stěnového opláštění, které pro průřez tvoří příčnou vazbu. Toto příčné podepření brání přetvoření příčného řezu nosníku a přispívá tak ke zvýšení jeho vzpěrné únosnosti. Správné započítání vlivu příčného podepření může vést k hospodárnějšímu návrhu průřezu nosníku. Příspěvek se zaměřuje na možnosti stanovení kritického zatížení tenkostěnných kovových nosníků s příčným spojitým podepřením. Je popsána numerická metoda výpočtu kritického zatížení spojitě příčně podepřeného nosníku a výsledky jsou porovnány s hodnotami získanými pomocí programového systému na bázi metody konečných prvků.

¹ Ing. Ivan Balázs, Ústav kovových a dřevěných konstrukcí, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 329, e-mail: balazs.i@fce.vutbr.cz.

² Prof. Ing. Jindřich Melcher, DrSc., Ústav kovových a dřevěných konstrukcí, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 300, e-mail: melcher.j@fce.vutbr.cz.

2 ZTRÁTA PŘÍČNÉ A TORZNÍ STABILITY IDEÁLNÍHO NOSNÍKU BEZ PŘÍČNÉHO PODEPŘENÍ

Jev ztráty příčné a torzní stability ideálního samostatného nosníku bez příčného podepření je charakterizován celkovým nadměrným prostorovým přetvořením prutu z roviny ohybu [1]. Celková prostorová deformace má dvě složky – příčné posunutí průřezu v a jeho natočení φ . Ilustrace tohoto jevu na příkladu příčného řezu jednoose symetrického průřezu je znázorněna na Obr. 1, kde q_z je svislé zatížení (v rovině XZ), C_g označuje těžiště průřezu, C_s střed smyku, kóta a_z je vzdálenost těžiště od středu smyku a kóta e_z označuje vzdálenost působíště zatížení od těžiště průřezu. Tlačená část průřezu má snahu vybočit z roviny ohybu.



Obr. 1: Ztráta příčné a torzní stability ideálního nosníku

Na křivce zatížení – deformace potom existuje určitý bod, kdy ideální nosník ztratí stabilitu (bifurkace rovnováhy). Tomuto bodu přísluší určitá hodnota kritického zatížení, resp. kritického momentu M_{cr} . Hledání kritického zatížení ideálního nosníku řešil Vlasov, který odvodil diferenciální rovnice stability libovolného tenkostěnného prutu otevřeného průřezu namáhaného současně ohybem a osovou silou [2]. Po úpravě pro prut namáhaný pouze ohybem je problém definovaný pomocí dvou homogenních diferenciálních rovnic čtvrtého řádu (1) a (2) a příslušných okrajových podmínek. Zde jsou uvedeny okrajové podmínky pro prut prostě uložený v ohybu i v kroucení (3) a pro prut vetknutý v ohybu i kroucení (4) [1]:

$$EI_z v^{IV} + (M_y \varphi)'' = 0, \quad (1)$$

$$EI_\omega \varphi^{IV} - GI_t \varphi'' - 2b_z (M_y \varphi)' + q_z (e_z - a_z) \varphi + M_y v'' = 0, \quad (2)$$

$$v(0) = v(L) = 0, v''(0) = v''(L) = 0, \varphi(0) = \varphi(L) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(L) = 0, \quad (3)$$

$$v(0) = v(L) = 0, v'(0) = v'(L) = 0, \varphi(0) = \varphi(L) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0, \quad (4)$$

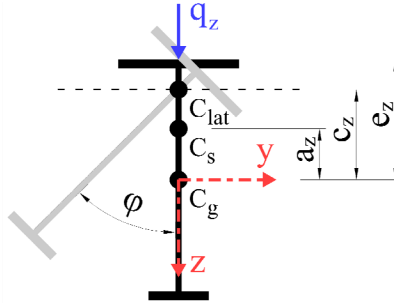
kde E je modul pružnosti v tahu a tlaku, G modul pružnosti ve smyku, I_z moment setrvačnosti k ose z , I_ω výsečový moment setrvačnosti, I_t moment setrvačnosti v prostém kroucení, q_z je svislé zatížení působící v rovině XZ, M_y ohybový moment v téže rovině, v a φ neznámé funkce přetvoření a b_z je tzv. charakteristická úsečka průřezu. Vztah pro její určení lze nalézt např. v [1]. Aktuálně platná norma [3] používá pro tuto hodnotu označení z_j .

Z matematického hlediska je kritické zatížení dáno řešením problému vlastní hodnoty diferenciálních rovnic (1) a (2) s příslušnými okrajovými podmínkami. Odvozený vztah pro kritický moment samostatného ohýbaného prutu alespoň jednoose symetrického průřezu zatíženého příčným zatížením procházejícím středem smyku je k dispozici např. v normě [3].

3 ZTRÁTA PŘÍČNÉ A TORZNÍ STABILITY IDEÁLNÍHO NOSNÍKU S PŘÍČNÝM SPOJITÝM PODEPŘENÍM

Předpokládejme, že ohýbaný nosník je ve vzdálenosti c_z od těžiště (v bodě C_{lat}) po délce spojitě příčně zajištěn podélným podepřením, které v tomto bodě brání příčnému posunutí průřezu.

V místě podepření je tak průřezu vnučena osa otáčení [1]. Situace je znázorněna na Obr. 2. Předpokládejme dále, že příčné podepření je dokonale tuhé a nosník má rozpětí L . Uvažujme ideální nosník, tedy nosník dokonale přímý, bez počátečních nahodilých odchylek.



Obr. 2: Ztráta příčné a torzní stability po délce spojitě podepřeného ideálního nosníku

3.1 Určení kritického zatížení

Vzhledem k tomu, že příčnému posunutí průřezu je zabráněno, jedinou neznámou funkcí přetvoření je úhel natočení (zkroucení) φ a diferenciální rovnice (1) a (2) doznají určitých úprav. Výsledkem je jedna homogenní diferenciální rovnice čtvrtého řádu (5) [1] (obecně s nekonstantními koeficienty) s okrajovými podmínkami (6) pro prosté uložení v kroucení a (7) pro vetknutí v kroucení:

$$\left[EI_{\omega} + EI_z(c_z - a_z)^2 \right] \varphi^{IV} - GI_t \varphi'' + 2(c_z - a_z - b_z)(M_y \varphi')' + q_z(e_z - c_z)\varphi = 0, \quad (5)$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(L) = 0, \quad (6)$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0, \quad (7)$$

kde q_z je hledaná hodnota zatížení, při kterém nastane ztráta stability (kritické zatížení). Z matematického hlediska se jedná o problém vlastní hodnoty, zde konkrétně o tzv. Sturm-Liouvilleův problém vlastní hodnoty diferenciální rovnice čtvrtého řádu [4]. Funkce φ je derivována podle x . Řešení tohoto složitějšího problému je možné pomocí kombinace některých numerických metod, např. pomocí metody sítí (tzv. metody konečných diferencí) a inverzní mocninné metody, které lze snadno algoritmizovat.

Rovnici (5) nejprve upravme na tvar (8):

$$A \varphi^{IV} - B \varphi'' + C M_y' \varphi'' = q_z D \varphi, \quad (8)$$

kde

$$A = \left[EI_{\omega} + EI_z(c_z - a_z)^2 \right], \quad (9)$$

$$B = GI_t, \quad (10)$$

$$C = 2(c_z - a_z - b_z), \quad (11)$$

$$D = (c_z - e_z). \quad (12)$$

Rovnice (8) bude použita jako výchozí pro hledání vlastní hodnoty (tedy kritického zatížení). Interval $\langle 0; L \rangle$ (rozpětí nosníku) rozdělme s krokem h pomocí $N - 1$ ekvidistantních uzlů x_i na N subintervalů tak, že $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = L$, kde $x_i = ih$ a $h = 1 / N$ (Obr. 3). Každému uzlu x_i odpovídá příslušná hodnota hledané funkce φ_i . Z okrajových podmínek (6) i (7) vyplývá, že $\varphi_0 = \varphi(0) = 0$ a $\varphi_N = \varphi(L) = 0$.

Zavedme první (13), druhou (14) a čtvrtou (15) centrální diferencí pro aproximaci první, druhé a čtvrté derivace:

Výraz S_i ve výše uvedených vztazích je dán vyjádřením (24):

$$S_i = h^2 (CM'_{yi} - B). \quad (24)$$

Výraz (17) lze zapsat takto (tučně vytištěné symboly značí vektory):

$$K \boldsymbol{\varphi} = q_z D h^4 \boldsymbol{\varphi}, \quad (25)$$

kde

$$\boldsymbol{\varphi} = |\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \dots \ \varphi_{N-3} \ \varphi_{N-2} \ \varphi_{N-1}|^T, \quad (26)$$

a dále upravit na tvar (27):

$$G \boldsymbol{\varphi} = q_z \boldsymbol{\varphi}, \quad (27)$$

kde matice G je dána vztahem (28):

$$G = \frac{K}{Dh^4}. \quad (28)$$

Rovnice (27) je výchozí pro hledání vlastní hodnoty (kritického zatížení) q_z . Pro praktické posouzení je nejdůležitější nejnižší vlastní hodnota (nejnižší vlastní číslo) [5], tedy nejmenší zatížení, při kterém může nastat ztráta příčné a torzní stability ideálního nosníku.

Aproximaci nejmenšího vlastního čísla matice G a příslušného vlastního vektoru γ (z fyzikálního hlediska se jedná o tvar vybočení) lze určit např. iterační inverzní mocninnou metodou [6], tedy základní mocninnou metodu (dávající nejvyšší vlastní číslo matice) aplikovanou na matici G^{-1} . Popis algoritmu mocninné metody lze nalézt např. v [6]. Další z řady možností je použití iteračního QR algoritmu [7], který poskytuje všechna vlastní čísla (spolu s příslušnými vlastními vektory) dané matice G . Algoritmus je stručně popsán [7]:

$$G = G_0 = Q_0 R_0, \quad (29)$$

$$G_{k+1} = R_k Q_k, \quad k > 0, \quad (30)$$

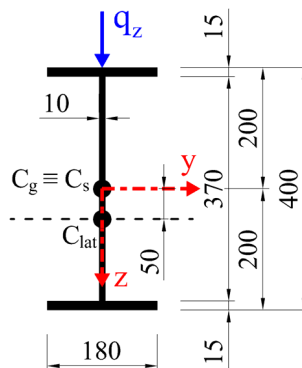
kde matice Q_k a R_k jsou dány tzv. QR rozkladem matice G_k . Matici G_k lze rozložit na matice Q_k a R_k např. pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu [8]. Potom platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = D, \quad (31)$$

kde D je diagonální matice s vlastními čísly matice G na diagonále (ostatní prvky jsou nulové). Vlastní vektory jsou dány sloupci matice vzniklé násobením matice Q_{k+1} maticí Q_k (z předchozího kroku).

3.2 Příklad výpočtu kritického zatížení

Uvažujme ocelový nosník dvojose symetrického průřezu s rozměry dle Obr. 4, který je ve vzdálenosti $c_z = 50$ mm od těžiště zajištěn po celé své délce spojitým příčným podepřením.



Obr. 4: Průřez uvažovaného nosníku

Nosník má rozpětí $L = 5$ m a na horní pásnici je zatížen svislým rovnoměrným spojitým zatížením o velikosti 1 kN/m. Jsou uvažovány dvě varianty uložení v souladu s okrajovými podmínkami (6) a (7).

Aplikujme nyní postup vyložený v kapitole 3.1 s krokem $h = 0,10$ m (tedy počet subintervalů $N = 50$). Řešení vede na diferenciální rovnici (32) s okrajovými podmínkami (6) nebo (7):

$$121122,3\varphi^{IV} - 41848,8\varphi'' + 0,1M_y'\varphi'' = 0,25q_z\varphi, \quad (32)$$

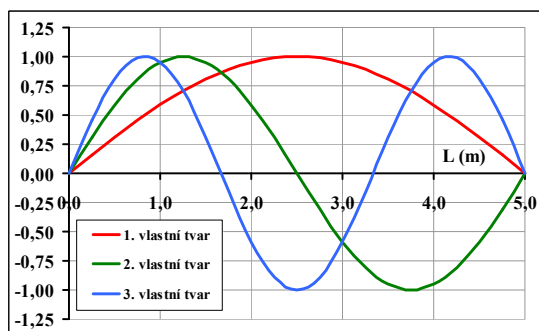
kteřá je pomocí metody konečných diferencí převedena na soustavu 49 algebraických rovnic a řešena inverzní mocninnou metodou. Nejnižší vlastní čísla určená tímto způsobem vycházejí pro tento případ 145520 (prosté uložení) a 472480 (vetknutí). Z fyzikálního hlediska se jedná o kritická zatížení (v N/m). Tomu odpovídají kritické momenty určené dle (33) pro prosté uložení a (34) pro vetknutí:

$$M_{cr} = \frac{1}{8}q_{cr}L^2, \quad (33)$$

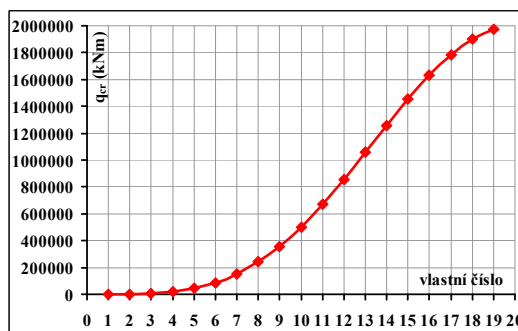
$$M_{cr} = \frac{1}{12}q_{cr}L^2. \quad (34)$$

Pro prosté uložení vychází kritický moment $M_{cr} = 454,8$ kNm a pro vetknutí $M_{cr} = 984,3$ kNm. Pro srovnání: kritický moment nosníku stejného průřezu, rozpětí a okrajových podmínek bez příčného ztužení určený standartním postupem dle [3] vychází $M_{cr} = 261,1$ kNm (prosté uložení) a $M_{cr} = 885,9$ kNm (vetknutí). Příčné podepření tedy v tomto případě způsobilo příznivé zvýšení kritického momentu o cca 74 % (pro prosté uložení) a o cca 11 % (pro vetknutí).

Řešením pomocí QR algoritmu vychází nejnižší vlastní číslo pro prostě uložený nosník 142660 a pro vetknutý nosník 462393. Tomu odpovídají kritické momenty dle (33) $M_{cr} = 445,8$ kNm (prosté uložení) a $M_{cr} = 963,3$ kNm (vetknutí). Na Obr. 5 jsou zobrazeny první tři normované vlastní tvary (tvary vybočení) získané řešením úplného problému vlastních čísel matice G pomocí QR algoritmu (vyšší vlastní tvary nejsou pro přehlednost vyobrazeny). Na Obr. 6 je graficky znázorněn průběh vlastních čísel matice G určený pomocí QR algoritmu.



Obr. 5: První tři normované vlastní tvary

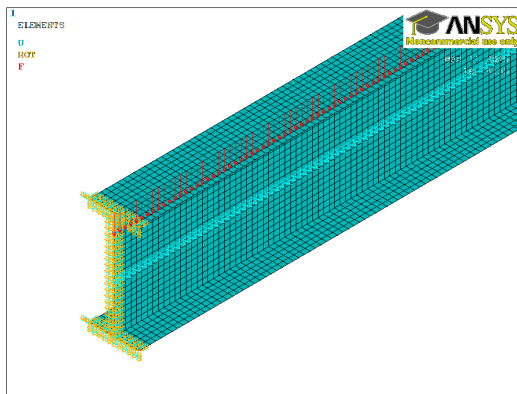


Obr. 6: Vlastní čísla matice G

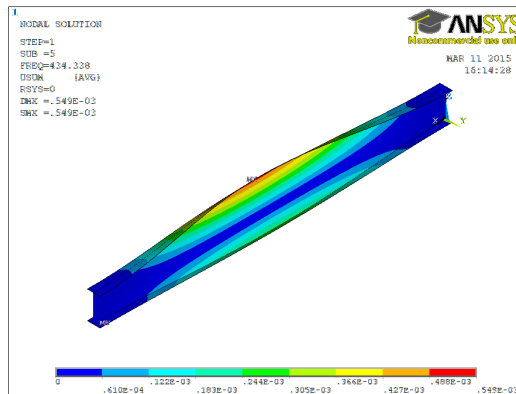
3.3 Řešení pomocí metody konečných prvků a vzájemné srovnání

Příklad řešený v části 3.2 je řešen v programovém systému ANSYS 14.0 [9], který je určen pro výpočty metodou konečných prvků. Uvažovaný průřez se skládá z částí, jejichž tloušťka je ve srovnání s ostatními rozměry malá. Pro tento typ konstrukčních prvků jsou vhodné deskostěnové prvky, pro analýzu je použit prvek SHELL181. Geometrie, poloha příčného podepření a zatížení je v souladu s příkladem uvedeným v části 3.2; jsou uvažovány dvě varianty uložení, a sice prosté uložení a vetknutí. Pro numerickou analýzu je zvolena délka hrany elementu 20 mm. Detail modelovaného průřezu včetně realizace příčného podepření je patrný na Obr. 7 (vetknutí v ohybu i kroucení; deplanaci průřezu v uložení je zabráněno). V případě varianty prostého uložení v ohybu i

kroucení se jedná o tzv. vidlicové uložení, které je dle [10] pro řešení příčné a torzní stability předpokládáno. Zabraňuje příčnému vybočení v podpoře, zatímco deplanace se může volně rozvinout. V programu byla provedena statická analýza podle teorie I. řádu a analýza vlastních tvarů (LBA analýza), která poskytuje vlastní čísla a tvary vybočení. Touto analýzou bylo získáno nejnižší vlastní číslo s hodnotou 146610 (pro prosté uložení) a 434338 (pro vetknutí). Tab. 1 shrnuje a srovnává aproximace kritických momentů získané metodou konečných diferencí s inverzní mocninnou metodou, QR algoritmem a řešením metodou konečných prvků v programu ANSYS 14.0. Na Obr. 8 je jeden z výsledků analýzy v programu ANSYS – první kladný vlastní tvar pro řešený průřez pro případ vetknutého nosníku.



Obr. 7: Model uvažovaného nosníku v programu ANSYS



Obr. 8: Výsledek analýzy metodou konečných prvků – první kladný vlastní tvar

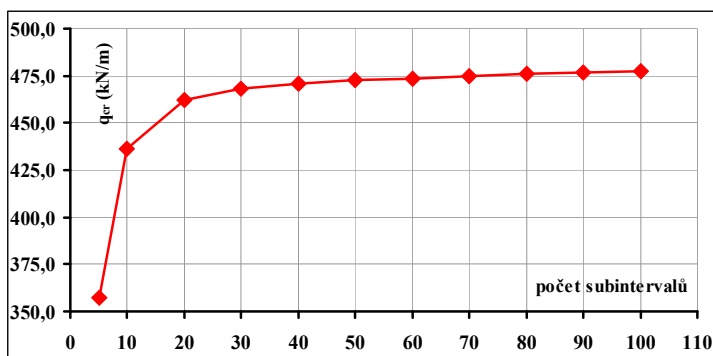
Tab. 1: Srovnání metod – aproximace kritických momentů (v kNm)

Metoda	Uložení	
	prosté	vetknutí
Metoda konečných diferencí + inverzní mocninná metoda	454,8	984,3
Metoda konečných diferencí + QR algoritmus	445,8	963,3
Metoda konečných prvků (ANSYS)	458,2	904,9

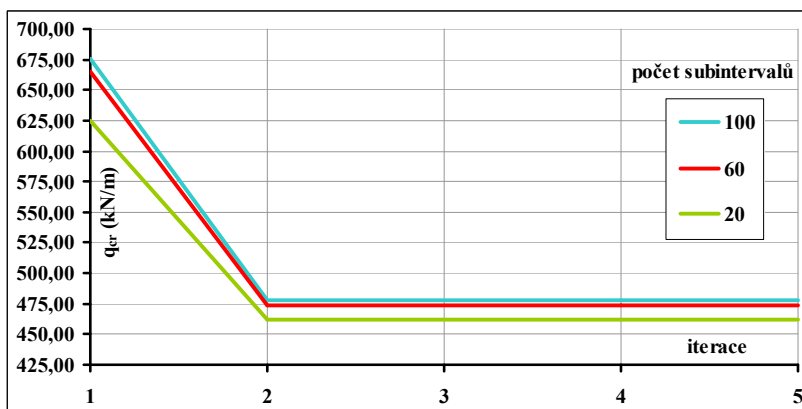
3.4 Algoritmizace numerických metod pro výpočet kritického zatížení a parametrické studie

Algoritmy metody konečných diferencí spolu s inverzní mocninnou metodou a QR algoritmem vyložené v kapitole 3.1 byly naprogramovány v jazyce VBA (programovací jazyk pro aplikaci MS Excel). Po zadání potřebných vstupních údajů (průřezové charakteristiky, rozpětí, poloha příčného podepření, poloha působíště zatížení, krok dělení intervalu daného rozpětím nosníku a požadovaná přesnost iteračního výpočtu) program rozdělí interval rozpětí nosníku na jednotlivé subintervaly (diskretizace problému), sestaví příslušné matice a vektory a iteračně vypočítá hledanou hodnotu kritického zatížení.

Některé výsledky poskytnuté tímto programem jsou prezentovány na následujících grafech: na Obr. 9 je závislost vypočítané hodnoty kritického zatížení na počtu subintervalů, na které je rozděleno rozpětí nosníku, na Obr. 10 je znázorněna konvergence iteračního výpočtu inverzní mocninné metody k prvnímu vlastnímu číslu pro různá dělení intervalu. Konvergence je velmi rychlá. Vstupní hodnoty jsou převzaty z příkladu v části 3.2 pro případ nosníku na obou koncích vetknutého.

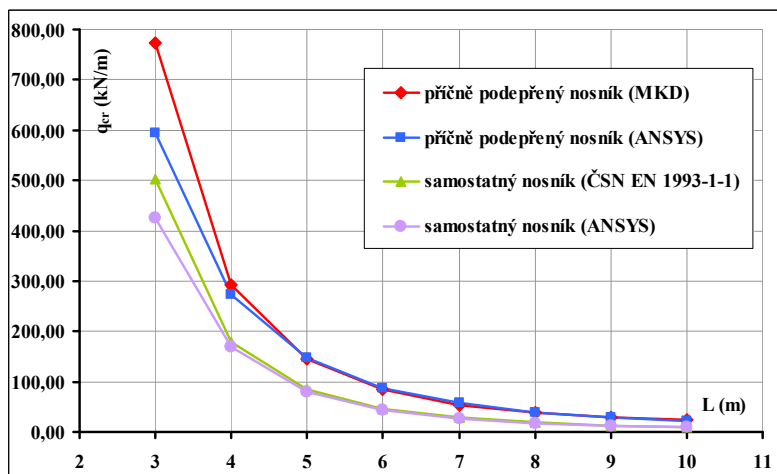


Obr. 9: Závislost kritického zatížení na dělení intervalu

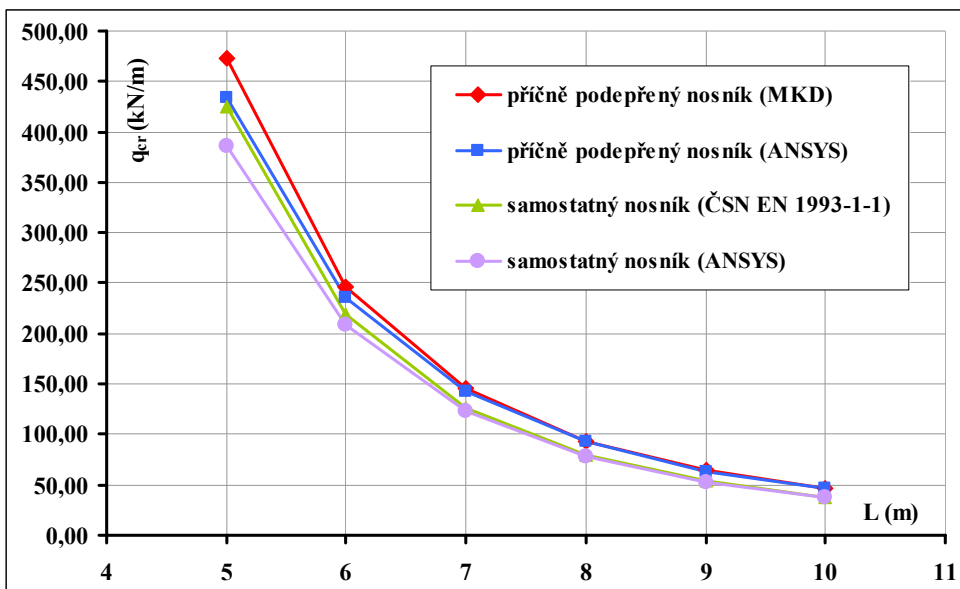


Obr. 10: Konvergence iteračního výpočtu k prvnímu vlastnímu číslu

Na Obr. 11 je graf znázorňující srovnání kritických zatížení samostatného prostě uloženého nosníku (výpočet dle [3] a programu ANSYS) a příčně podepřeného prostě uloženého nosníku (výpočet metodou konečných diferencí – MKD – a pomocí programu ANSYS). Na Obr. 12 je tatáž situace pro nosník vetknutý (pro přehlednost jsou zobrazena jen rozpětí od 5 do 10 m).



Obr. 11: Srovnání metod výpočtu kritického zatížení – prostě uložení



Obr. 12: Srovnání metod výpočtu kritického zatížení – vetknutí

Na výše uvedených grafech je patrný určitý rozdíl mezi získanými hodnotami kritických zatížení pro malá rozpětí (nízké štíhlosti) nosníků. Tento rozdíl lze vysvětlit skutečností, že u malých rozpětí nosníků tenkostěnných průřezů se při řešení metodou konečných prvků projevují lokální problémy stability štíhlých stěn průřezu, které výsledky nepříznivě ovlivňují, neboť působí současně s globálním problémem ztráty stability prutu jako celku. U větších rozpětí zcela převládá globální ztráta příčné a torzní stability a rozdíl mezi metodami je minimální. Vzhledem k tomu, že matice soustavy odvozená metodou konečných diferencí v tomto příspěvku byla odvozena z diferenciálních rovnic globální stability ohýbaného nosníku (za předpokladu neměnnosti příčného řezu), je přirozené, že uvedené lokální jevy nejsou zohledněny.

4 ZÁVĚR

Příspěvek se zabývá ztrátou příčné a torzní stability spojitě příčně podepřených nosníků tenkostěnného průřezu. Příčné podepření zvyšuje vzpěrnou odolnost průřezů; na konkrétním příkladu dvojose symetrického profilu byl porovnáním se samostatným nosníkem kvantifikován vliv spojitého příčného podepření na velikost kritického momentu. Pro výpočty kritického zatížení byly použity vybrané numerické metody pro hledání vlastních čísel a v jazyce VBA byl vytvořen program pro automatizovaný výpočet. Z provedených parametrických studií vyplývá, že vliv příčného podepření na kritické zatížení je podstatný a jeho uvážení může vést k použití štíhlejších průřezů, což má příznivý vliv na spotřebu materiálu a na hmotnost nosné konstrukce. Konstrukční návrh tak může být efektivnější.

Získané aproximace kritických zatížení byly srovnány s hodnotami získanými numerickou analýzou v programovém systému na bázi metody konečných prvků. Určité rozdíly mezi výsledky použitých metod jsou patrné zejména pro nízké štíhlosti nosníků, kdy se při řešení pomocí programových systémů založených na metodě konečných prvků výrazněji projevují lokální problémy. Popsané numerické algoritmy (metoda konečných diferencí, mocnná metoda) jsou poměrně snadno algoritmovatelné a umožňují vytvoření vlastních aplikací pro řešení problémů kritického zatížení.

PODĚKOVÁNÍ

Príspevek bol realizovaný za finančnú podporu projektu špecifického výzkumu Vysokého učení technického v Brně č. FAST-J-14-2345 a Grantové agentury ČR v rámci projektu P105/12/0314.

LITERATURA

- [1] BŘEZINA, V. *Vzpěrná únosnost kovových prutů a nosníků*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1962. 384 s.
- [2] VLASOV, V. Z. *Tenkostěnné pružné pruty*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. 572 s.
- [3] ČSN EN 1993-1-1. *Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha: Český normalizační institut, 2006. 96 s.
- [4] RATTANA, A. & BÖCKMANN, C. Matrix methods for computing eigenvalues of Sturm-Liouville problems of order four. *Journal of Computational and Applied Mathematics* [online]. 2013, vol. 249, s. 144-156 (13 s). ISSN 0377-0427 (Online). DOI: 10.1016/j.cam.2013.02.024.
- [5] KINDMANN, R. & LAUMANN J. Ermittlung von Eigenwerten und Eigenformen für Stäbe und Stabwerke. *Stahlbau*. 2004, č. 1, s. 26-36. ISSN 0038-9145.
- [6] DALÍK, J. *Numerické metody*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 1997. 145 s. ISBN 80-214-0646-1.
- [7] VONDRÁK, V. & POSPÍŠIL, V. *Numerické metody I* [online]. 2011. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf
- [8] BJORCK, A. Numerics of Gram-Schmidt orthogonalization. *Linear Algebra and its Applications* [online]. 1994, vol. 197-198, s. 297-316 (20 s). ISSN 0024-3795 (Online). DOI: 10.1016/0024-3795(94)90493-6.
- [9] ANSYS® Academic Research, Release 14.0.
- [10] SEDLACEK, G. & NAUMES, J. *Excerpt from the Background Document to EN 1993-1-1: Flexural buckling and lateral buckling on a common basis: Stability assessments according to Eurocode 3*. Aachen: Institut und Lehrstuhl für Stahlbau und Leichtmetallbau, 2008. 142 s.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Josef Vičan, CSc., Katedra stavebných konstrukcí a mostov, Stavebná fakulta, ŽU v Žiline.

Doc. Ing. Martin Psočný, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.