

Jana LABUDKOVÁ¹, Pavlína MATEČKOVÁ²

VÝPOČETNÍ PROGRAM PRO ANALÝZU KRUHOVÝCH A MEZIKRUHOVÝCH ROTAČNĚ SYMETRICKY ZATÍŽENÝCH ŽELEZOBETONOVÝCH DESEK

SOFTWARE FOR ANALYSIS OF ROTATIONALLY SYMMETRICALLY ANNULAR AND CIRCULAR REINFORCED CONCRETE SLABS

Abstrakt

Cílem práce bylo vytvořit univerzální program pro vyztužování železobetonových mezikruhových a kruhových desek v radiálním a tangenciálním směru. Program slouží k navrhování a posuzování libovolně uložených rotačně symetrických železobetonových mezikruhových a kruhových desek jakéhokoli rozpětí. Na základě volby uživatele, program navrhne řešení tak, aby vyhovělo nejen všem konstrukčním zásadám, ale především meznímu stavu únosnosti a meznímu stavu použitelnosti.

Klíčová slova

Mezikruhová deska, kruhová deska, radiální výztuž, tangenciální výztuž, mezní stav únosnosti, mezní stav použitelnosti.

Abstract

The aim of this work was to create a complex computer program for reinforced concrete annular and circular slabs reinforced in the radial and tangential direction. The program can be used for design and assessment of annular and circular reinforced concrete slabs with various supports and span. Based on user's choice, the program proposes solutions to not only meet all the detailing rules keeping, but especially ultimate limit state and serviceability limit state.

Keywords

Annular slab, circular slab, radial reinforcement, tangential reinforcement, ultimate limit state, serviceability limit state.

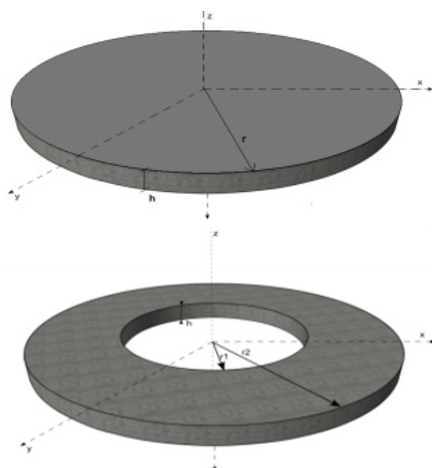
1 ÚVOD

V dnešní době se ve stavební praxi setkáváme i s objekty kruhového půdorysného tvaru. Jejich střešní či stropní konstrukce pak mohou tvořit kruhové a mezikruhové desky (obr. 1). Takové železobetonové kruhové a mezikruhové desky jsou horizontálně nosné a zatížené i podepřené kolmo na svou střednicovou rovinu. Jedná se o plošné konstrukce válcového typu, jejichž tloušťka je řádově menší než jejich průměr, popřípadě šířka mezikruží. Výsledný uživatelský program byl vytvořen v MS Excel 2007, který je běžně přístupný. Vytvořený program slouží k navrhování a následnému posuzování výztuže v železobetonových deskách mezikruhového i kruhového tvaru.

¹ Bc. Jana Labudková, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, e-mail: jana.labudkova@vsb.cz.

² Ing. Pavlína Matečková, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 394, e-mail: pavlina.mateckova@vsb.cz.

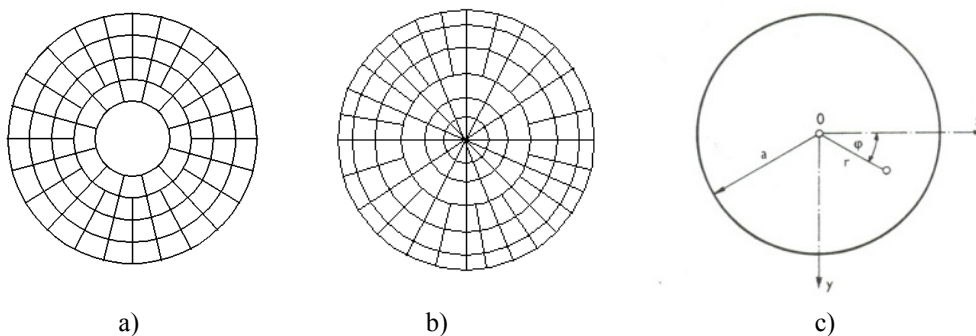
Navržená konstrukce je v programu posuzována dle mezního stavu únosnosti i použitelnosti a zároveň je programem automaticky zkontrolováno dodržení všech konstrukčních zásad.



Obr. 1: Model konstrukce mezikruhového a kruhového tvaru

2 ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY STATICKÉ ANALÝZY

Pokud se jedná o zatížení, je uvažováno s působením plošného statického silového rovnoměrného zatížení, které je rotačně symetrické a působí kolmo na rovinnou střednicovou plochu desky. Po zadání rozměrů konstrukce je ověřeno, zda jsou splněny podmínky Kirchhoffovy teorie tenkých desek, na jejímž základě je program vytvořen. Nezbytným předpokladem pro správné fungování programu je, že výztuž bude kladena v radiálním a tangenciálním směru. (viz obr. 2a, 2b).



Obr. 2: Způsob vyztužení konstrukce a souřadnicový systém

Při řešení je využito válcových souřadnic. V půdorysu je poloha určena polárními souřadnicemi r a φ , ve válcových souřadnicích přibývá ještě souřadnice z . (viz obr. 2c).

3 VYTVOŘENÝ PROGRAM

Program je vytvořen pro osm různých způsobů rotačně symetrického podepření mezikruhových desek a čtyři různé způsoby rotačně symetrického podepření kruhových desek. Součástí programu jsou i kruhové desky, podepřené na svém okraji a navíc sloupelem v ose rotace. (viz níže - obr. 4,5).

Uživatelské prostředí programu je rozděleno na dvě části. V první části program provede statickou analýzu kruhových i mezikruhových desek a následně řeší rovnice desky v polárních souřadnicích pro všechny typy podepření takových konstrukcí. Obecný tvar deskové rovnice mezikruhových a kruhových desek je:

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r \quad (1)$$

kde:

$w_0(r)$ – je partikulární integrál základní rovnice, který závisí na zatížení. Pro rovnoměrné spojitě zatížení platí:

$$w_0(r) = \frac{pr^4}{64D} \quad (2)$$

kde :

r – poloměr desky

p – rovnoměrné spojitě zatížení

D – desková tuhost

C_1, C_2, C_3, C_4 – integrační konstanty, které se určí z okrajových podmínek uložení desky

V případě, kdy se jedná o plnou kruhovou desku, musí z fyzikálního hlediska platit C_3 i $C_4 = 0$ a desková rovnice kruhových desek má tedy tvar:

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 r^2 \quad (3)$$

Důvodem je, že plná kruhová deska nemá žádný vnitřní okraj, který je nahrazen středem desky. Nemá-li být průhyb uprostřed desky neomezeně velký, musí být $C_3 = 0$. Není-li střed zatížen osamělým břemenem (popřípadě bodově podepřen sloupem), musí platit také $C_4 = 0$, aby nerostla neomezeně posouvající síla q_r . [2]

Program řeší také plné kruhové desky ve středu podepřené sloupem, které jsou řešeny rozdělením na dva zatěžovací stavy. Pro toto statické schéma, kdy je deska podepřena kromě svého okraje také ve středu rotace, se tedy pracuje s následujícími tvary deskové rovnice kruhové desky:

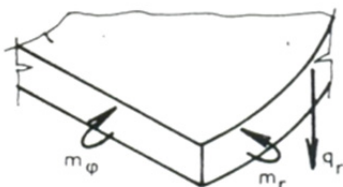
Pro 1. zatěžovací stav:

$$w_1(r) = w_0(r) + C_{11} + C_{21} r^2 \quad (4)$$

Pro 2. zatěžovací stav:

$$w_2(r) = C_{12} + C_{22} r^2 + C_{42} r^2 \ln r \quad (5)$$






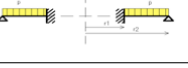
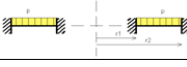

Postupnými matematickými úpravami deskové rovnice mezikruhových a kruhových desek byly získány a následně využity rovnice průhybů, průběhů napětí a vnitřních sil pro všechny typy uložení desek. Vnitřními silami jsou měrné ohybové momenty radiální i tangenciální a měrná posouvající síla (viz obr. 3).



Obr. 3: Nenulové měrné vnitřní síly [8]


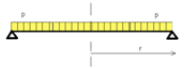
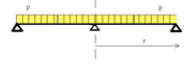
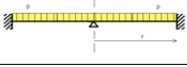
Vzhledem k tomu, že rovnice mezikruhové desky obsahuje čtyři integrační konstanty, je při řešení konkrétní úlohy potřebné sestavit rovnice pro dvě okrajové podmínky na obou okrajích desky

(vnějším i vnitřním). Okrajové podmínky pro jednotlivé typy uložení mezikruhových desek jsou vypsány v tabulce (viz obr. 4).

Číslo varianty a typ uložení	Okrajové podmínky		Číslo varianty a typ uložení	Okrajové podmínky	
	Vnitřní okraj	Vnější okraj		Vnitřní okraj	Vnější okraj
5 	$m_r=0$ $q_r=0$	$w=0$ $w'=0$	1 	$w=0$ $m_r=0$	$w=0$ $w'=0$
6 	$w=0$ $w'=0$	$m_r=0$ $q_r=0$	2 	$m_r=0$ $q_r=0$	$w=0$ $m_r=0$
7 	$w=0$ $m_r=0$	$w=0$ $m_r=0$	3 	$w=0$ $w'=0$	$w=0$ $m_r=0$
8 	$w=0$ $w'=0$	$w=0$ $w'=0$	4 	$w=0$ $m_r=0$	$m_r=0$ $q_r=0$

Obr. 4: Způsob uložení mezikruhové desky a okrajové podmínky

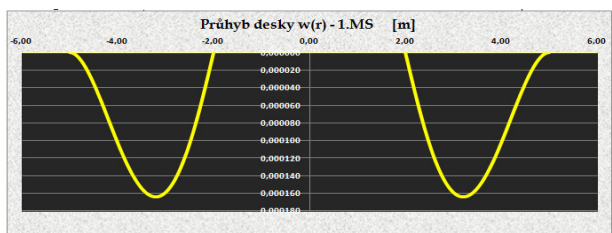
Rovnice kruhové desky obsahuje dvě integrační konstanty. Pro její řešení je potřebné sestavit rovnice pro dvě okrajové podmínky na okraji desky. Okrajové podmínky pro jednotlivé typy uložení kruhových desek jsou vypsány v tabulce (viz obr. 5).

Číslo varianty a typ uložení	Okrajové podmínky
9 	$w=0$ $w'=0$
10 	$w=0$ $m_r=0$
11 	$w_1=0$ $w_2=0$ $m_{r1}=0$ $m_{r2}=0$
12 	$w_1=0$ $w_2=0$ $m_{r1}=0$ $w'_2=0$

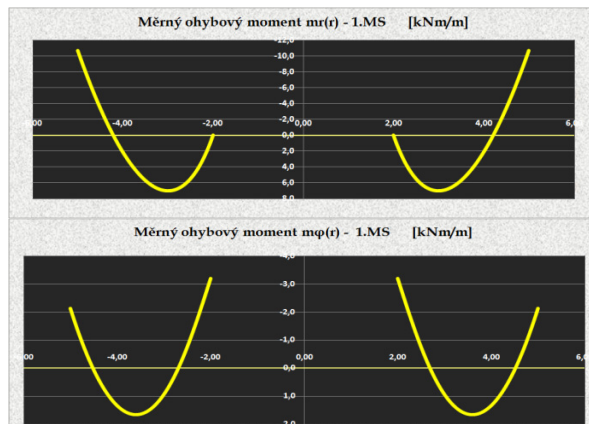
Obr. 5: Způsob uložení kruhové desky a okrajové podmínky

Ve druhé části je na problematiku nahlíženo v souvislosti s principy používanými při navrhování a posuzování betonových konstrukcí včetně dodržení konstrukčních zásad.

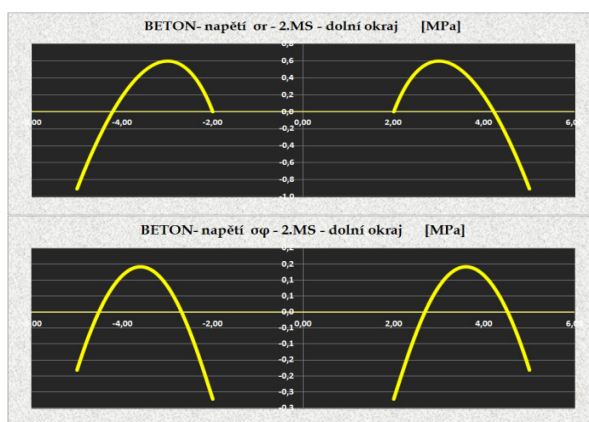
Při vzájemném propojení obou hlavních částí byl vytvořen program v MS Excel, jehož výstupem jsou graficky znázorněné průhyby (viz obr. 6) a průběhy vnitřních sil (viz obr. 7) potřebné k návrhu železobetonové konstrukce. Součástí výstupu je také grafické znázornění průběhů napětí v betonovém průřezu (viz obr. 8).



Obr. 6: Ukázkové vykreslení průhybu mezikruhové desky



Obr. 7: Ukázkové vykreslení měrných ohybových momentů mezikruhové desky



Obr. 8: Ukázkové vykreslení napětí mezikruhové desky

Dále může uživatel přistoupit k fázi navrhování železobetonové mezikruhové nebo kruhové desky. Pro navržení radiální a tangenciální betonářské výztuže jsou zapotřebí extrémní hodnoty příslušných momentů, které se v programu pro přehlednost vypíší do tabulky. K těmto extrémům se přiřadí hodnota poloměru v místě, kde se daný extrém nachází. V tabulce lze také nalézt maximální napětí v krajních vláknech betonu. (viz obr. 9).

MAXIMÁLNÍ MOMENTY - (PRO NÁVRHOVÉ HODNOTY ZATÍŽENÍ)			
1) RADIÁLNÍ		2) TANGENCIÁLNÍ	
hodnota poloměru	MAX $m_r(r)$	hodnota poloměru	MAX $m_\phi(r)$
pro maximální $m_r(r)$ [m]	[kNm/m]	pro maximální $m_\phi(r)$ [m]	[kNm/m]
5,00	-10,630	2,00	-3,191
2,99	6,995	3,60	1,660
MAXIMÁLNÍ NAPĚTÍ V BETONU - (PRO CHARAKTERISTICKÉ HODNOTY ZATÍŽENÍ)			
hodnota poloměru	MAX $\sigma_r(r)$	hodnota poloměru	MAX $\sigma_\phi(r)$
pro maximální $\sigma_r(r)$ [m]	[MPa]	pro maximální $\sigma_\phi(r)$ [m]	[MPa]
2,99	0,596	3,60	0,141
5,00	-0,906	2,00	-0,272

Obr. 9: Extrémní hodnoty momentů a napětí

Výztuž se navrhuje k hornímu i dolnímu povrchu desky, pro záporné i kladné momenty, přičemž program sám zohledňuje již dříve navrženou výztuž i její krytí a nedopustí, aby docházelo ke kolizi prutů. U desek podepřených sloupem je řešeno navíc protlačení desky sloupem.

Po dobu celého výpočtu a navrhování betonářské výztuže je uživatel průběžně informován, zda jeho návrh vyhovuje z hlediska obou mezních stavů i všem předepsaným předpisům

a konstrukčním zásadám. Pokud kdykoli v průběhu procesu navrhování řešení nevyhoví, je uživateli poskytnuta rada s dalším možným postupem či vhodnými změnami.

Při ověřování navrženého řešení z hlediska mezního stavu použitelnosti je uživatel informován, zda vzniknou či nevzniknou trhliny. Program vyhodnotí, že vzniknou trhliny, pokud platí podmínka $\sigma_c > f_{ctm}$. V případech, kdy trhliny vzniknou, program spočítá část průřezu, která zůstala neporušena trhlinami a následně je spočtena nová desková tuhost pro průřez s trhlinami.

Program přistoupí na výpočet omezení napětí v tlačené části betonu a v tažené betonářské výztuži a vyhledá extrémní hodnotu, kterou použije při vyhodnocování, zda návrh z hlediska omezení napětí vyhoví či nevyhoví. Z výsledného průběhu napětí vykresleného pro potřebu omezení napětí v betonu, je vyhledána extrémní hodnota reprezentující napětí v tlačené části betonu v dolních, resp. horních vláknech betonu. Charakteristická hodnota napětí má vyhovět podmínce (6):

$$\sigma_{c,ek} \leq k_1 f_{ck} \quad (6)$$

kde podle národní přílohy je $k_1 = 0,6$.

Omezením tahového napětí v betonářské výztuži je zabráněno vzniku nepřijatelných deformací a trhlin. Maximální napětí výztuže, které může v konstrukci vzniknout, se vypočítá dle (7):

$$\sigma_{s1,ek} = \alpha_e \sigma_s \quad (7)$$

$$\sigma_{s1,ek} \leq k_{3,yk} f_{yk} \quad (8)$$

Dále je posouzen průřez na omezení šířky trhlin, během kterého se vypočítá a ověří minimální průřezová plocha výztuže. Proveďte se posouzení porovnáním výsledků s tabulkovými hodnotami, zda vyhoví či nevyhoví.

Omezení průhybu je v programu řešeno dvěma metodami. První metodou stanovenou v EC 2 je posouzení průhybu přímým výpočtem. Program vypočítá měrný ohybový moment na mezi vzniku trhlin. Podle postupu z EC 2 jsou programem vypočítány hodnoty deformace pro stav bez trhlin α_I a stav s plně rozvinutými trhlinami α_{II} . Na základě tzv. rozdělovacího součinitele ζ je pak vypočítán celkový průhyb od kvazistálé kombinace zatížení. Výsledný průhyb $\alpha = w_{kvazi}$ se porovná s dovolenou hodnotou průhybu w_{lim} a stanoví se, zda vyhoví či nevyhoví.

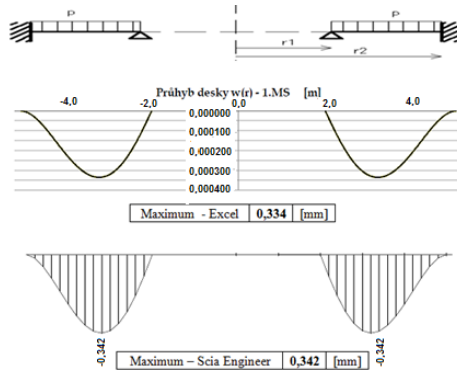
$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (9)$$

U druhé metody lze při posouzení průhybu od přímého výpočtu upustit. Metoda je založena na porovnání poměru rozpětí k účinné výšce (l/d) s mezním poměrem (l/d)_{mezní}. Na základě porovnání program vyhodnotí, zda poměr vyhoví či nevyhoví.

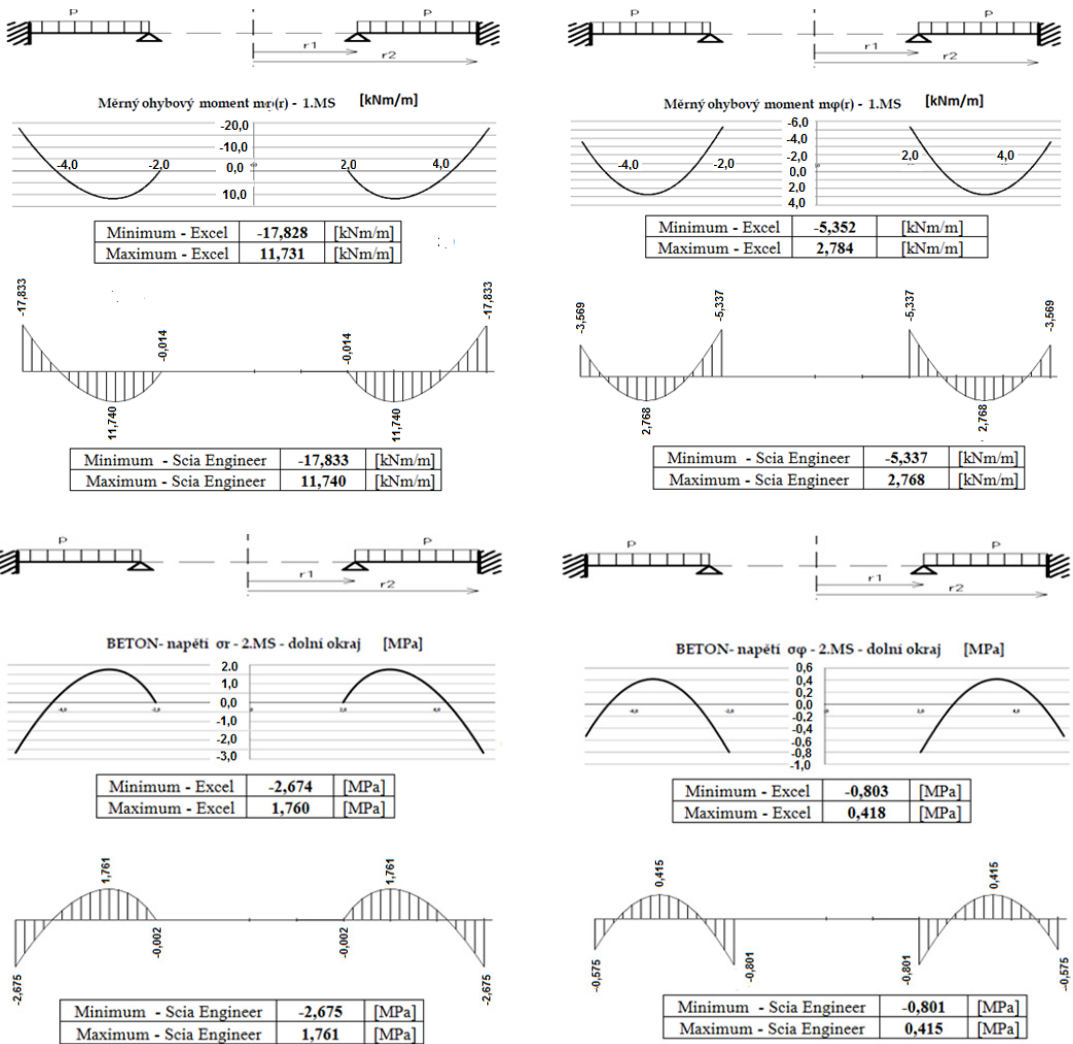
Při vytváření programu byl kladen důraz na to, aby práce s ním byla jednoduchá a pro uživatele přehledná. Jednoznačně jsou označena místa, kam uživatel zadává hodnoty, které blíže specifikují danou konstrukci. S těmito hodnotami program automaticky pracuje. Uživatel je po celou dobu výpočetního postupu naváděn k dalším krokům souvisejících s mezním stavem únosnosti a mezním stavem použitelnosti pro radiální i tangenciální směr.

Součástí programu je uživatelský manuál, který přispívá k lepší orientaci při práci v programu a umožňuje tak uživateli rychlé a efektivní využití. Jedná se o univerzální program, který uživateli umožní si zvolit libovolný typ uložení, rozměry konstrukce, třídu betonu i oceli a na základě programem provedené statické analýzy konstrukci navrhnout a posoudit. Celý postup návrhu i posudku konstrukce je v závěru programu přehledně zobrazen a shrnut v tzv. „Verzi pro tisk“, což uživateli ušetří práci s dalším formátováním a pohodlně si může početní výstup vytisknout ve formátu A4. Součástí výstupu jsou i všechny navržené dimenze konstrukce a její celkové posouzení z hlediska mezního stavu únosnosti a mezního stavu použitelnosti.

Správnost výsledných průhybů, vnitřních sil a napětí byla ověřena srovnáním s výstupy namodelovaných konstrukcí v programech, které pracují na jiném principu. Dalším způsobem kontroly bylo srovnání výsledků řešených příkladů z odborné literatury, jejichž zadání bylo vloženo do vytvořeného programu. Výsledky se téměř shodovaly u všech způsobů ověřování (viz obr. 10, 11).



Obr. 10: Srovnání výstupu z programu v Excelu a Scia Engineer pro mezikruhovou desku – průhyb



Obr. 11: Srovnání výstupu z programu v Excelu a Scia Engineer pro mezikruhovou desku – měrné ohybové momenty a napětí

3.1 Odvození měrného deskového momentu setrvačnosti I^D

V souvislosti s mezním stavem použitelnosti bylo nutné přizpůsobit metodiku výpočtů dle Eurokódu tak, aby ji bylo možné aplikovat v práci s deskovými rovnicemi pro mezikruhové a kruhové desky. To je řešeno prostřednictvím tzv. měrného deskového momentu setrvačnosti, který je podrobně odvozen v lit. [4].

Při navrhování betonových konstrukcí, je v obecných vztazích pro výpočty související s mezním stavem použitelnosti využíván moment setrvačnosti I' – průřezu neporušeného trhlinami a I'' – průřezu porušeného trhlinami. Oba momenty setrvačnosti slouží k výpočtům napětí, se kterým se pracuje během celého výpočtu mezního stavu použitelnosti.

Při úpravě obecných vztahů bylo důležité vystihnout podstatu výpočtů mezního stavu použitelnosti a správně je zakomponovat do teorie mezikruhových a kruhových desek a jejich základní rovnice vyjadřující průhyb (1).

Při analýze desek se používá pro výpočet průhybu desková rovnice (1), která je závislá na deskové tuhosti D (vyskytující se v konstantách C_1 až C_4). Ze vztahu pro výpočet deskové tuhosti D byl odvozen měrný deskový moment setrvačnosti I_c^D pro betonový průřez:

$$I_c^D = \frac{h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (10)$$

V deskové tuhosti je nutné pro mezní stav použitelnosti zohlednit i horní a dolní výztuž a jejich polohu v průřezu. Měrný deskový moment setrvačnosti celého průřezu i s výztužemi je znázorněn ve vztahu (11).

$$I_i^D = I_c^D + A_c^I (a_{gi} - a_c)^2 + \alpha_e \cdot A_{s1} \cdot (a_{gi} - d)^2 + \alpha_e A_{s2} \cdot (a_{gi} - d_2)^2 \quad (11)$$

Dále je v programu získána nová desková tuhost $D = EI_i^D$, použitelná pro MS použitelnosti. Měrný deskový moment setrvačnosti je takto možné spočítat pro průřez bez trhlin i s trhlinami.

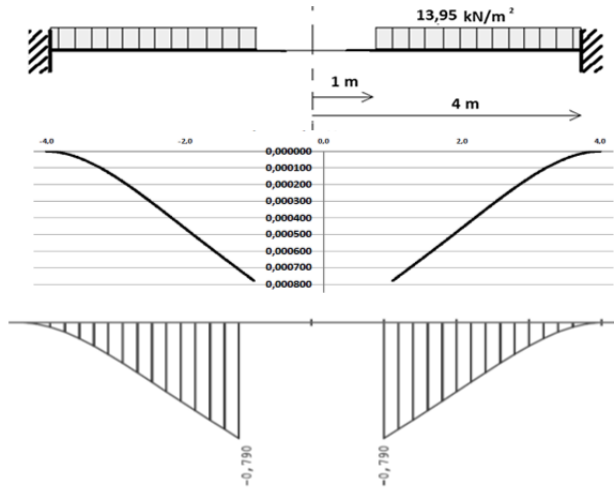
Odvozený měrný deskový moment setrvačnosti, který ovlivňuje deskovou tuhost a její průhyb, lze uplatnit i pro výpočet napětí. Napětí je totiž pro desky závislé na deskové tuhosti prostřednictvím rovnice průhybu (resp. jejich derivací) a je stanoveno dle vztahů (12) a (13):

$$\sigma_r = \pm \frac{E}{1-\mu^2} \left(zw' + \frac{z}{r} \mu w' \right) \quad (12)$$

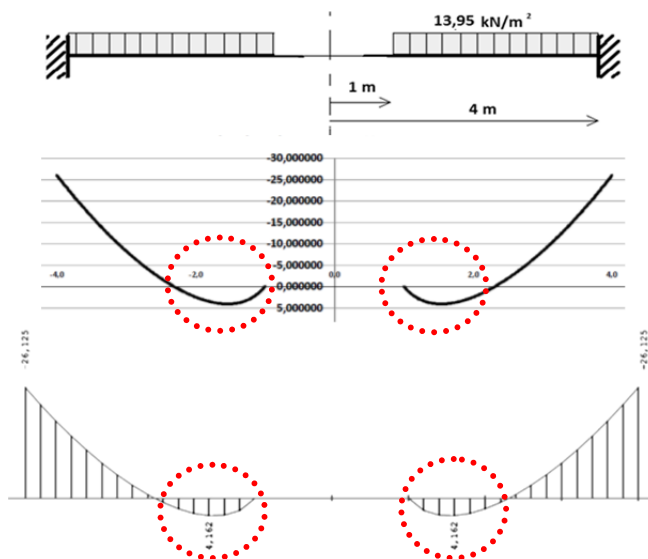
$$\sigma_\varphi = \pm \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{z}{r} w' + z \mu w'' \right). \quad (13)$$

3.2 Anomálie průběhů vnitřních sil

U některých typů statického schématu a různých rozměrů desky dochází u mezikruhových desek při vykreslování vnitřních sil k neočekávaným průběhům. Jedním z příkladů je mezikruhová deska, která je vetknutá po svém vnějším obvodu. Zatímco průhyb (viz obr. 12) i měrný ohybový moment tangenciální měl ve vytvořeném programu v MS Excel i ve Scia Engineer očekávaný průběh, radiální měrný ohybový moment nabývá i kladných hodnot (viz obr. 13), což je u konzolového typu uložení neobvyklé.



Obr. 12: Výsledný průhyb z Excelu a Scia Engineer



Obr. 13: Neobvyklý průběh měrných radiálních ohybových momentů z Excelu a Scia Engineer

4 ZÁVĚR

Ve srovnání s jinými programy, které pracují například na principu metody konečných prvků, je výsledný program vytvořen na základě analytického řešení, které umožňuje dosažení přesnějších výsledků. V porovnání s jinými programy se vyskytuje určité omezení v souvislosti se zatížením. Pro práci ve výsledném programu je nutné rovnoměrné plošné rotačně symetrické zatížení působící kolmo na rovinnou střednicovou plochu desky. Výhodou vytvořeného programu je řešení zvolené konstrukce od statické analýzy, získání průběhů deformací a vnitřních sil, přes návrh až k posouzení dle mezního stavu únosnosti a použitelnosti, přičemž je program schopný pracovat i s průřezem porušeným trhlinami. Vytvořený program nabízí návrh a posouzení konstrukce z hlediska prvního i druhého mezního stavu ve větším rozsahu než ostatní programy. Navržené řešení je také ověřeno z hlediska všech konstrukčních zásad.

PODĚKOVÁNÍ

Tento příspěvek byl zpracován v rámci projektu CZ.1.07/2.3.00 /20.0013 – „Tvorba a internacionalizace špičkových vědeckých týmů a zvyšování jejich excelence na Fakultě stavební VŠB-TUO“.

LITERATURA

- [1] DICKÝ, J. & MISTRÍKOVÁ, Z. & SUMEC, J. *Pružnost' a plasticita v stavebnictve 2*, STU v Bratislavě, 2006, ISBN 80-227-2515-3, 320 s.
- [2] DOBIÁŠOVÁ, V. & VARAĐOVÁ, V. *Pružnost a plasticita II*, VUT v Brně, 1996, ISBN 80-214-0630-5, 31 s.
- [3] HARVANČÍK, J. & DRAHOŇOVSKÝ, Z. *Výpočty prútových a plošných konštrukcí*, Bratislava, 1970, 293 s.
- [4] LABUDKOVÁ, J. *Tvorba výpočetního programu pro analýzu kruhových a mezikruhových železobetonových desek*, Bakalářská práce, Ostrava, 2012, 95 s.
- [5] LABUDKOVÁ, J. *Program pro výpočet a navrhování mezikruhových železobetonových desek*, SVOČ, Ostrava, 2011, 20 s.
- [6] LABUDKOVÁ, J. *Výpočetní program pro návrh a posudek kruhových i mezikruhových železobetonových desek*, SVOČ, Ostrava, 2012, 20 s.
- [7] PROCHÁZKA, J. & ŠTĚPÁNEK, P. & KRÁTKÝ, J. & KOHOUTKOVÁ, A. & VAŠKOVÁ, J. *Navrhování betonových konstrukcí*, ČBS, 2007, Praha, ISBN 978-80-903807-5-2, 316 s.
- [8] JANAS, P.: Přednášky k předmětu Pružnost a plasticita II (katedra stavební mechaniky FAST, VŠB – TUO).
- [9] TEPLÝ, B. & ŠMIRÁK, S. *Pružnost a plasticita II*, VUT Brno, 1993, ISBN 80-214-0498-1, 199 s.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Ludovít Fillo, PhD., Katedra betónových konstrukcí a mostov, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Martin Moravčík, Ph.D., Katedra stavebných konstrukcí a mostov, Stavebná fakulta, ŽU v Žiline.